NOTAS Y COMENTARIOS
Estudios Filosóficos LVI (2007) 111 ~ 121

GEOMETRÍA COMO INSTRUMENTO ESTÉTICO

M.ª Francisca Blanco Martín
Universidad de Valladolid

***Resumen.** La geometría ha tenido siempre un papel fundamental en determinadas ramas del arte. Contemporáneamente, la geometría fractal es un instrumento al que se acude como una nueva herramienta artística.*

Introducción y antecedentes de la geometría fractal

A lo largo de la Historia se ha recurrido a las Matemáticas y a la Geometría como elementos sustentadores de la Arquitectura y el Arte. Dichos elementos fueron considerados, desde la antigüedad, como una condición indispensable que garantiza la belleza del producto final. Por ejemplo Pitágoras observó que toda armonía dependía de una proporción, basada en intervalos musicales, de una relación numérica.

Podemos decir que la teoría de la proporción se ocupa del estudio de los ritmos por conjugación de objetos de igual forma y la teoría de la simetría se asocia con las ideas de equilibrio, belleza, orden, repetición, sujeta a unas ciertas reglas de objetos de igual forma.

En el estudio de los fenómenos naturales, con frecuencia se utilizan modelos matemáticos. Estos modelos simplifican la geometría del fenómeno con el objetivo de facilitar su estudio; por ejemplo, es frecuente representar una montaña como un cono, sin embargo la observación de una montaña real nos presenta una geometría más compleja, de forma más irregular.

La geometría tradicional o euclídea es incapaz de describir la forma de objetos, cuyo proceso de formación es dinámico, como una nube, una montaña, una costa, un árbol, etc.

Tomemos como ejemplo una costa donde están en contacto dos medios, la tierra y el agua. La acción del mar sobre la tierra modifica la forma de la costa como consecuencia de la erosión que el agua produce en el litoral. A su vez los ríos, lagos, etc., con sus vertidos al mar contribuyen a esta modificación con sedimentaciones de la tierra en el mar. Por otra parte los movimientos del planeta pueden provocar importantes interacciones entre el mar y la tierra.

Observamos que éste es un proceso dinámico, en el que intervienen diferentes fenómenos a distintas escalas.

La geometría fractal aparece como una respuesta a la necesidad de representar los objetos generados por sistemas dinámicos.

Se puede obtener así un modelo matemático (fractal) que se aproxima satisfactoriamente al objeto real en toda una franja de escalas, limitadas por ciertos valores máximos y mínimos.

En consecuencia la geometría fractal ofrece un modelo que busca una regularidad en las relaciones entre un objeto y sus partes a diferentes escalas.

Hasta aquí hemos puesto de manifiesto las limitaciones de la geometría euclídea para el estudio de los objetos cuya formación obedece a un proceso dinámico y señalado que la solución a esa problemática planteada la ofrece la geometría fractal. Pero ¿qué es la geometría fractal?

Una de las primeras dificultades que nos encontramos es la de definir un fractal, objeto de estudio de la geometría fractal.

Benoit Mandelbrot, considerado el padre de los fractales, en el año 1977, adoptó el vocablo fractal para referirse a este nuevo tipo de objetos geométricos.

El término fractal, proviene del adjetivo de origen latino, *"fractus"*, que se podría traducir como roto, irregular, fraccionado.

La primera definición de fractal dada por Mandelbrot es bastante compleja:

> "Forma geométrica fragmentada que puede subdividirse en partes, cada una de las cuales es una copia a tamaño reducido del todo".

Con ella, Mandelbrot nos ofrece una primera característica de los fractales, que es lo que se va a denominar autosemejanza. Esto es, que cada parte de un fractal se puede considerar como una copia reducida del fractal completo, o al menos que, a distintas escalas, tiene características formales similares.

En realidad, el concepto de autosemejanza no deja de ser una extensión de algo mucho más familiar, como es la simetría, aunque en este caso considerando cualquier dirección y escala.

Un fractal consta de fragmentos geométricos de orientación y tamaño variable, pero de aspecto similar, de modo que a todas las escalas que se examine, la estructura presentada será similar. Así un objeto fractal ofrecerá el mismo aspecto observado a una escala de metros o milímetros. Si observásemos dos fotografías de un fractal tomadas con diferentes ampliaciones, sin ningún elemento externo que sirva de referencia, resultaría difícil decir a qué ampliación se tomó cada una. Los fractales poseen esa característica de parecerse a sí mismos, propiedad que recibe el nombre de autosemejanza o autosimilitud.

La geometría fractal utiliza el ordenador como herramienta y el algoritmo como medio o procedimiento Para representar gráficamente un fractal basta con crear una rutina que tome una forma geométrica simple y la dibuje en la pantalla del ordenador a una determinada escala. Si repetimos varias veces la llamada a esta rutina de forma recursiva y a diferentes escalas, añadiremos gradualmente más y más detalles al dibujo.

El principio de autosemejanza y el de recursividad aparecen aquí íntimamente ligados, pues permiten construir mediante un mismo proceso el conjunto de elementos que constituyen el fractal, proceso que es implementado mediante programas sencillos y repetitivos con un ordenador.

En cada etapa recursiva de este proceso de generación de una curva fractal vamos aumentando su longitud, longitud que aumenta en relación con la unidad de medida. Teniendo en cuenta esta característica de los fractales podemos dar una nueva definición de fractal como:

> *"Un conjunto cuya dimensión de Hausdorff es mayor que su dimensión topológica".*

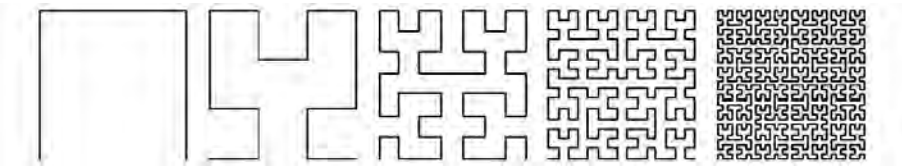
Esta definición formal no describe ninguna característica del fractal que podamos captar directamente y por ello es la más difícil de comprender.

La dimensión topológica se corresponde con el concepto geométrico de dimensión que, al menos de forma intuitiva, todos tenemos: una curva tiene dimensión 1, una superficie tiene dimensión 2, etc.

La dimensión de Hausdorff es más compleja de definir, y tiene que ver con la forma de medir un objeto; podríamos decir que esta dimensión lo que proporciona es la velocidad a la que la medida de un determinado objeto aumenta al reducirse la unidad de medida, o bien, la rapidez con que su longitud se acerca a infinito al disminuir la unidad de medida. Esta dimensión mide el grado de irregularidad de un conjunto, y con ello, paralelamente, su grado de autosemejanza. Ambos conceptos, en apariencia tan dispares, están sin embargo íntimamente ligados entre sí.

La dimensión geométrica siempre es un número entero, mientras que la dimensión de Hausdorff, también llamada dimensión fractal, puede no serlo; a modo de ejemplo la dimensión de las curvas fractales de Koch, Peano, Hilbert, etc., está comprendida entre 1 y 2.

Las bases de la geometría fractal se remontan a finales del siglo XIX y principios del XX, cuando aparecen conjuntos con propiedades "extrañas", que no se corresponden con su estructura geométrica, por ejemplo, curvas (de dimensión uno) que llenan el plano (de dimensión dos), como las curvas de Peano y de Hilbert, curvas cuya longitud entre dos puntos es infinita, curvas continuas sin tangente, con infinitos picos, como la curva de Koch, etc. A continuación mostramos la generación, hasta la quinta iteración, de la curva de Peano.



Curva de Peano, construida en las cinco primeras iteraciones.

La representación completa de tales curvas, con un número de iteraciones "infinito", en el momento de su descripción, era puramente mental, no así en estos momentos gracias a la potencia alcanzada por los modernos ordenadores.

La aparición de estos conjuntos geométricos con propiedades extrañas, plantea la necesidad de establecer una nueva forma de medir, así surge el concepto de dimensión de Hausdorff. Durante el primer tercio de siglo XX Besicovitch estudia las propiedades geométricas de los conjuntos planos que él llamó irregulares Sus trabajos constituyen los cimientos de la geometría fractal, pero no es hasta el último cuarto del siglo XX, cuando Mandelbrot recoge todos estos estudios previos y con el desarrollo de los ordenadores se hace posible no solo visualizar los objetos fractales, sino avanzar en el estudio de esta nueva rama de las matemáticas y su interés fuera del ámbito puramente académico.

Sistemas dinámicos

La geometría fractal trata de estudiar y representar los fenómenos dinámicos, los procesos en movimiento, como puede ser la formación de una montaña, un coral, etc. Estos procesos dinámicos aparecen también en economía, demografía, astronomía, botánica, física, química, ecología, etc.

Matemáticamente es posible simular estos procesos mediante una función, f(x), y su aplicación sucesiva a un elemento $x_{o,}$ llamado valor inicial o germen, en un proceso llamado iteración:

$$f(x_o)=x_1,\ f^2(x^0)=f(x^1)=x^2,\ f^3(x^1)=f(x^2)=x^3,\ldots$$

$$f^m(x_o)=\ldots=f(x_m)=x_{m+1}$$

Al conjunto de valores { x_0 x_1, x_3 x_4,... x_m,...} se llama órbita de la función f(x) para el valor inicial x_0.

Consideramos como ejemplo la función elevar al cuadrado un número real $f(x) = x^2$:

Analicemos el comportamiento de diferentes órbitas de la función $f(x) = x^2$, para distintos valores del germen. Si $x_0 = 1$, su órbita es el conjunto que tiene todos sus elementos iguales a 1. Si $x_0 = -1$, su orbita toma una vez el valor –1 y todos los demás elementos de la órbita valen 1. Si x_0 es un número real mayor que 1, por ejemplo 2, obtenemos valores en la órbita cada vez mayores, que en el límite tienden a infinito, si x_0 es un valor comprendido entre 0 y 1, por ejemplo 1/3 su órbita esta formada por valores cada vez más pequeños, que en el límite tienden a 0. Podemos concluir que:

> *Un sistema dinámico puede mostrar un gran número de comportamientos distintos. Sin embargo la mayoría tienen algo en común y es que tras un número suficientemente grande de iteraciones, la función tiende a estabilizarse en uno ó más valores. Este conjunto de valores para los cuales la función se estabiliza, cuando el número de iteraciones tiende a infinito se llama atractor.*

Sistemas dinámicos complejos y conjuntos de Julia

Notamos por ***C*** al conjunto de los números complejos, llamamos sistema dinámico al par (***C***,f) formado por el conjunto ***C*** y una aplicación f del conjunto ***C*** en sí mismo.

Vamos a considerar para cada número complejo $c \in \boldsymbol{C}$ fijo y arbitrario el sistema cuadrático ($\boldsymbol{C}$, f_c), donde $f_c(z) = z^2 + c$. El estudio de la órbita de los puntos $z \in \boldsymbol{C}$, en el sistema dinámico ($\boldsymbol{C}$, f_c), es decir:

$$f_c(z) = z^2 + c,\ f_c^{\,2}(z) = (z^2+c^2)+ c,\ f_c^{\,3}(z) = [(z^2 + c^2)+ c]^2+ c....,$$

fue realizado por Julia y Fatou en 1918 y 1926 respectivamente.

La sucesión formada por los puntos de la órbita de cada elemento z puede ser acotada o no acotada. Si la sucesión está acotada, sus términos están contenidos en un entorno del origen, y si la sucesión no está acotada, sus elementos se alejan del origen.

Al conjunto de los puntos z cuya órbita está acotada se le llama conjunto prisionero, este conjunto es no vacío. Por ejemplo los puntos fijos de la aplicación, es decir, las soluciones de la ecuación $z = z^2 + c$, tienen como órbita la sucesión constante igual a z, luego z es punto prisionero.

Al conjunto de los puntos z cuya órbita no está acotada se le llama conjunto escape, este conjunto es no vacío. Los valores de z con módulo muy grande, al ser iterados sucesivamente por la función para calcular su órbita, generan una sucesión, cuyos términos van aumentando el valor absoluto, es decir, la sucesión no está acotada y, estos valores de z están en el conjunto escape.

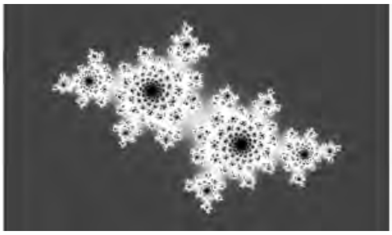
La frontera común de los conjuntos prisionero y de escape es lo que hoy se conoce como conjunto de Julia.

Para cada uno de los infinitos valores de c tenemos un conjunto de Julia, los cuales poseen una estructura fractal, es decir, son autosemejantes.

A pesar de que estos conjuntos se conocían y fueron estudiados en el primer cuarto del siglo XX, no es hasta la década de los 80 del mismo siglo, cuando se han hecho visibles gracias a los ordenadores, que nos han descubierto su gran belleza y riqueza de formas.

Para representar los conjuntos de Julia se asocia a cada píxel de la pantalla un punto del plano complejo y ese punto se itera mediante la función $f_c(z) = z^2 + c$, si después de un número de iteraciones, pongamos 1000, el módulo de z es mayor que un valor relativamente pequeño, por ejemplo 10, la órbita de z tiende a infinito. De esta forma podemos comprobar qué valores tienden a infinito y cuáles no. Los valores complejos cuya órbita no tiende a infinito, los representamos por el píxel de la pantalla asociado, obteniendo una zona negra, el borde o frontera de la región negra es lo que se llama conjunto de Julia, o bien a toda la región negra se la llama conjunto de Julia relleno.

El conjunto de Julia no depende del valor inicial, sino únicamente del valor de c; existen infinitos conjuntos de Julia uno para cada $c \in C$, siendo los más interesantes los correspondientes a los valores de c cuyo módulo es menor o igual que 2. A continuación se muestran conjuntos distintos, correspondientes con distintos c.



Podemos preguntarnos si existe alguna posibilidad de clasificar dichos conjuntos según su forma o estructura.

Los conjuntos de Julia pueden ser de dos tipos:

a) Conexos, es decir, formados por una sola pieza, como el primero de los mostrados más arriba.

b) Completamente disconexos, están formados por más de una pieza, como el segundo de la figura superior.

Si un conjunto de Julia no es conexo, tiene al menos dos piezas y debido a la autosemejanza que presenta, cada una de estas piezas a su vez está fragmentada en dos y así sucesivamente, en consecuencia el conjunto está compuesto por infinitas piezas; en este caso los conjuntos de Julia se denominan *polvo fractal.*

Podemos enunciar el siguiente:

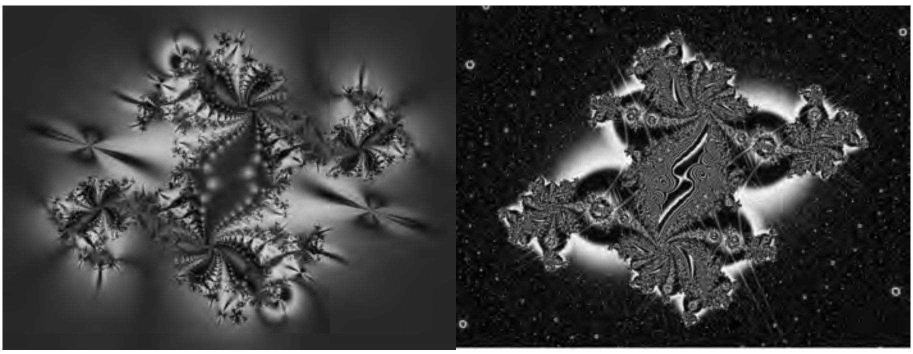
> Teorema: Sea ($\boldsymbol{C}$,$f_c(z)=z^2 + c$), $c \in \boldsymbol{C}$ un sistema dinámico cuyo conjunto de Julia notamos por $J(f_c)$.
>
> $J(f_c)$ es conexo si y solamente si la órbita de $z = 0$ no diverge a infinito.

O bien $J(f_c)$ es polvo fractal si y solamente si la órbita de $z = 0$ escapa a infinito.

El comportamiento de la órbita de $z = 0$ es suficiente para poder clasificar el conjunto de Julia correspondiente.

Es posible añadir más información a un gráfico, además de realzar su belleza, mediante el uso del color.

Se pueden obtener magníficas representaciones en color de conjuntos de Julia utilizando alguno de los algoritmos de color, como el denominado de *tiempo de escape*.



Diferentes coloraciones del mismo fractal

Conjunto de Mandelbrot

Este conjunto, considerado por muchos como el objeto matemático más complejo, posee tan extraordinaria belleza, que nos hace olvidar que tras las imágenes que observamos subyace una fascinante teoría matemática.

El conjunto de Mandelbrot está íntimamente relacionado con los conjuntos de Julia y su clasificación en conexos e inconexos.

El conjunto de Mandelbrot es el conjunto de números complejos $c \in \boldsymbol{C}$ tales que la órbita de 0 correspondiente a las funciones $f_c(z) = z^2 + c$, no tienden hacia infinito. Si recordamos el papel que desempeña la órbita de 0, valor inicial y crítico de la función $f_c(z) = z^2 + c$, en los conjuntos de Julia, podemos describir también el conjunto de Mandelbrot como:

El conjunto de puntos $c \in \boldsymbol{C}$ para los que el conjunto de Julia asociado al sistema dinámico $(\boldsymbol{C}, f_c(z) = z^2 + c)$, resulta ser conexo.

El teorema anterior nos proporciona un método práctico para representar gráficamente, mediante ordenador, el conjunto de Mandelbrot.

¿Cuándo podemos decir que una órbita diverge a infinito? La teoría de iteraciones nos dice:

> Una órbita del sistema dinámico anterior diverge a infinito, si y solamente si, algún punto de la órbita tiene módulo mayor o igual que 2. Podemos afirmar que, si después de un número suficiente de iteraciones, pongamos 300, un punto de la órbita permanece en módulo menor que 2, ya no diverge a infinito, y se representa el punto correspondiente en la pantalla. Cuanto mayor sea el número de iteraciones la representación será más nítida pero mayor será el tiempo de ejecución, por tanto, será necesario un compromiso de acuerdo con el objetivo deseado

Si la órbita de 0 para un c no escapa a infinito, el conjunto de Julia es conexo y c pertenece al conjunto de Mandelbrot.

$M = \{ c \in \boldsymbol{C}$ / órbita crítica de f_c no tiende a infinito $\}$

Si $c \in M$, $J(f_c)$ es conexo y si $c \notin M$, $J(f_c)$ es polvo fractal. De este hecho podemos concluir que el conjunto de Mandelbrot contiene todos los posibles conjuntos de Julia.

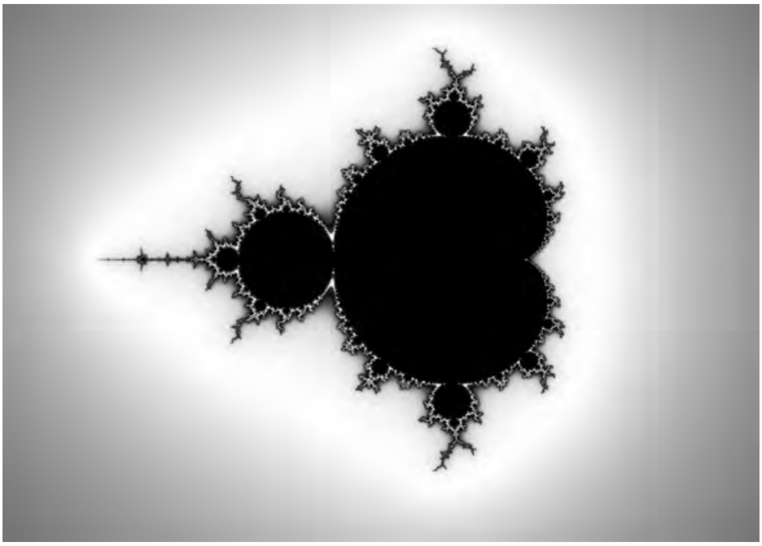
La representación gráfica tanto del conjunto de Mandelbrot como de los conjuntos de Julia puede contener, no solo más información, sino una mayor belleza, si se le añade color, para lo cual existen diversos algoritmos, uno de ellos denominado de tiempo de escape, que pone de manifiesto la velocidad a la que divergen las órbitas de los puntos.

En la representación del conjunto de Mandelbrot utilizando el algoritmo de tiempo de escape, se representan con color los puntos externos al conjunto, permaneciendo negro el conjunto propiamente dicho. Cada punto coloreado, externo al conjunto de Mandelbrot, se corresponde con un conjunto de Julia no conexo.

Si por ejemplo disponemos de los colores negro, azul, rojo y amarillo, podemos proceder de la siguiente forma: Si para un número complejo c la órbita de $z = 0$, tiene módulo mayor o igual que 2, en a lo más la quinta iteración, el punto no pertenece al conjunto de Mandelbrot y lo representamos en color amarillo, si el módulo de z es mayor o igual que 2 entre la sexta y la décima iteración lo representamos de color rojo, si esta circunstancia ocurre a partir de la décima iteración lo representamos en azul. Si el punto pertenece al conjunto de Mandelbrot lo representamos en negro.

En general disponemos de una paleta de colores de tamaño mucho mayor que cuatro, y una manera de proceder en ese caso puede ser:

Cada color de la paleta de colores del ordenador tiene asociado un número. Este algoritmo asocia el color de la paleta correspondiente con el número de la iteración en que la órbita de $z = 0$ escapa al infinito.



Conjunto de Mandelbrot

Fractales como expresión artística

Entre los distintos campos interesados en el estudio, desarrollo y aplicaciones de los fractales, destacamos aquí el uso de los mismos como instrumento de expresión artística.

Esta nueva forma de expresión estética mediante fractales, fronteriza entre el Arte y las Matemáticas, es muy reciente y esta íntimamente relacionada con el desarrollo y la capacidad de los modernos ordenadores, así como los programas informáticos adecuados.

A lo largo de la ultima década han surgido un gran número de programas informáticos para estos fines. Mencionamos dos de ellos, Fractint, y Ultra Fractal.

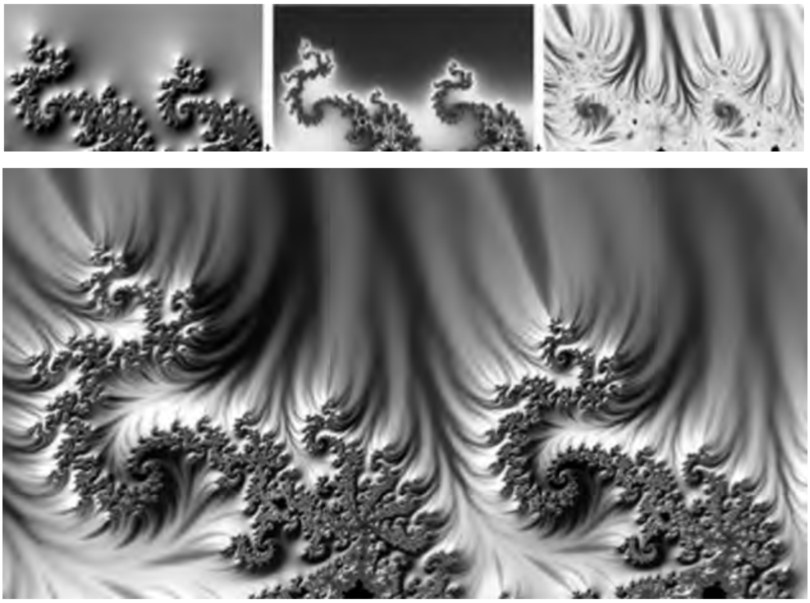
El más moderno de los dos es Ultra Fractal y en mi opinión el más adecuado para conseguir un buen y bello diseño gráfico. Este programa presenta muchas posibilidades de composición, coloración y creación de texturas. Una característica importante de este programa es que permite visualizar de manera inmediata la modificación de un diseño sin necesidad de iterar nuevamente el programa, permitiendo de una forma más intuitiva poder alcanzar el resultado deseado.

Fractint es uno de los programas más antiguos y más utilizados, y todavía no superado por ningún otro en cuanto a la gran diversidad de fractales que puede generar, sin embargo sus posibilidades expresivas están limitadas porque trabaja con una paleta de color con sólo 256 colores.

Hasta aquí hemos venido diciendo que la representación de un fractal en un ordenador es la ejecución de unos algoritmos que nos permiten ver el comportamiento de formulas matemáticas y podemos preguntarnos: ¿dónde está la expresión artística?

La clave estética de los fractales no solo está en el algoritmo empleado y los parámetros seleccionados, que proporcionan la forma básica, sino en la forma de tratarlos, por ejemplo el coloreado, mediante algoritmos de color, y la textura, utilizando varias capas, que permiten también matizar la coloración. Estas dos propiedades, coloreado y textura, confieren a cada imagen una estética única e irrepetible.

Del mismo modo que cada pintor o escultor utiliza una técnica propia en la creación de su obra, que nos transmite su sensibilidad y personalidad, el autor de un fractal, que podríamos denominar artista fractal, se expresa mediante formulas y algoritmos que modifica progresivamente hasta conseguir el objetivo deseado. Un análisis cuidadoso de un fractal artístico permite apreciar las emociones de su autor en cada forma y cada color. Y es que las Matemáticas también pueden expresar emociones. Como ejemplo mostramos la obra "Volcano" del artista fractal Javier Barrallo



Volcano, de Javier Barrallo. Las figuras superiores muestran las tres capas de las que se compone la imagen. La primera resalta la elevación introduciendo luces y sombras, la segunda establece la base de color y la tercera produce las texturas de fuego y humo.

Pueden verse en internet más obras de arte fractal correspondientes a autores del grupo "The Frontier between Art and Science".

Bibliografía

Barrallo, J.; *Geometría fractal: Algoritmia y representación.* Ed. Anaya Multimedia, Madrid, 1993.

Guzmán, M. y otros, *Estructuras fractales y sus aplicaciones.* Ed. Labor, Barcelona, 1993.

Mandelbrot, B., *Geometría fractal de la naturaleza.* Tusquets Editores, Barcelona, 1997.

Mandelbrot, B., *The fractals: Forms. Chance and dimension.* W.H. Freeman, San Francisco, 1977.

Peitgen, H., Jürgens, H., Saupe D., *Fractals for the classroom.* Springer Verlag, New York, 1992.

Patern Book. Fractals, *Art, and Nature.* Clifford A Pickover Editor. Singapur, 1997.