

En el primer centenario de *Begriffsschrift* (*)

I. APRECIACIONES DE LA OBRA

En 1879 el joven matemático alemán Gottlob Frege (1848-1925) publicaba en Halle su primer libro de Lógica con el título *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*¹. Este escrito de apenas cien páginas ha dado lugar a sorprendentes juicios de valoración en su propio ámbito.

* A lo largo de este trabajo mantendré la palabra alemana '*Begriffsschrift*' para referirme tanto a la obra como a la notación simbólica freguiana. Si el lector quiere adelantarse a penetrar su contenido, consulte III, A, 1 de este artículo.

1. Con el fin de simplificar las citas y referencias cruzadas usaré las siguientes abreviaturas.

a) *Begr.* en vez de G. FREGE: *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle, Louis Nebert, 1879. El texto fotocopiado utilizado se encuentra en G. FREGE: *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, editado por I. Angelelli; Hildesheim, Georg Olms, 1964.

b) *Angelelli*, seguido del correspondiente título, para citar los *Aufsätze* contenidos en la edición anterior.

c) *Grundl.* en vez de G. FREGE: *Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau, 1884. Usamos el texto fotocopiado difundido por Georg Olms, Hildesheim, 1961, que corresponde a la reimpresión de M. & H. Marcus, Breslau, 1934.

d) *Grundg.* en vez de G. FREGE: *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, Vol. I, Jena, 1893; Vol. 2, Jena, 1903. Usamos el texto fotocopiado difundido por Georg Olms, Hildesheim, 1962.

e) *Mangione* en vez de G. FREGE: *Logica e Aritmetica*, Scritti raccolti a cura di C. Mangione. Torino, Paolo Boringhieri, 1965. El escrito correspondiente de Frege se citará en italiano.

El gran lógico polaco J. Lukasiewicz escribía a este propósito: «De repente nos encontramos aquí con un fenómeno único en la historia de la Lógica. Sin explicación histórica posible, la lógica proposicional moderna nace en un estado casi perfecto de la privilegiada mente de G. Frege, el mayor lógico de nuestro tiempo»². W. V. O. Quine, refiriéndose también a este pequeño escrito, declara «que podríamos en verdad considerar a Frege, y no a Boole, como el fundador de la Lógica moderna»³. Desde una perspectiva espacio-temporal más comprensiva, I. M. Bochenski sostiene que «no puede compararse más que con una gran obra en toda la Historia de la Lógica: los *Analíticos Primeros* de Aristóteles»⁴, si bien concede más originalidad al maestro griego. Otros, en cambio, creen «que no sería injusto para con los lógicos anteriores o posteriores a Frege considerar el año 1879..., como la fecha más trascendental de toda la Historia de la Lógica»⁵. «...es quizás el libro de Lógica más importante de todos los tiempos», afirma J. V. Heijenoort⁶.

No resultaría difícil ni molesto aumentar considerablemente este elenco de valoraciones positivas. Pero juzgamos más interesante escuchar la misma voz de Frege criticando su propia obra. Es plenamente consciente de haberse embarcado en una empresa creativa, renovadora, frente a todo el trabajo lógico anterior. Teme la incompreensión de los especialistas, les acusa de haber dependido excesivamente del lenguaje ordinario (Sprache) y de la gramática⁷. Alguien pudiera pensar que la acusación recae sobre la lógica griega, escolástica, india, o que atañe

f) *Tecnos* en vez de G. FREGE: *Escritos lógico-semánticos*, Trad. de Carlos R. Luis y Carlos Pereda. Madrid, Tecnos, 1974. El escrito correspondiente de Frege se citará en castellano.

Las citas incluidas en el texto del artículo corresponden siempre a *Begriffsschrift*. El número arábigo antes de la página indica el párrafo.

Al citar *Begr.*, *Grundl.*, *Grundg.*, los párrafos están expresados sin más con números arábigos escritos antes de la paginación.

2. JAN LUKASIEWICZ, *On the History of the Logic of Propositions*. En *Selected Works*, edited by L. Borkowski. Amsterdam - London, North-Holland P. Co., 1970, p. 215.

3. WILLARD V. O. QUINE, *Mathematical Logic*, revised edition. Cambridge (Mass.), Harvard Univ. Press, 1955, p. 71. Cfr. J. LUKASIEWICZ, *Op. cit.* in nota 2, p. 198.

4. I. M. BOCHENSKI, *Formale Logik*, Freiburg/München, K. Albert, 1956, p. 313.

5. WILLIAM & MARTHA KNEALE, *The Development of Logic*, Oxford, Clarendon Press, 1962, p. 511.

6. JEAN VAN HEIJENOORT, *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic*, Cambridge (Mass.), Harvard Univ. Press, 1967, p. 1.

7. *Begr.*, Vorwort, p. XIII.

especialmente a la decadente situación de la disciplina en la primera mitad del siglo pasado. Se librería, por supuesto, el álgebra de G. Boole (1815-1864), la joven disciplina que de un golpe había pasar la Lógica del campo de la Filosofía al de la Ciencia. Pero también estaba incluida, como lo detectó prontamente E. Schröder (1841-1906), su máximo representante en Alemania y uno de los pocos capacitados para leer *Begriffsschrift*⁸.

Frege apreciaba particularmente su obra por tres motivos. Gran parte de la estructura de una lógica está en relación directa con la clase de enunciados que maneja y el análisis operado sobre los mismos. La Lógica anterior permanecía anclada, desde Aristóteles, en el patrón *sujeto-predicado*. En *Begriffsschrift* pareció más oportuno y fecundo el esquema *argumento-función*. Otro rasgo a tener en cuenta, aunque inferior al ya citado, es la interpretación de las constantes lógicas *si*, *y*, *no*, *hay*, *alguno*, *todo*, etc. Frege se sentía orgulloso de haber establecido importantes *conexiones entre ellas*. La última ventaja, no ciertamente práctica sino técnica y epistemológica, proviene del lado de la derivación o deducción. Es un proceso sometido a reglas, y es cómodo disponer de un número aceptable para mover enunciados con agilidad, sin trabas. Por eso llama la atención la dura disciplina de esta obra al someterse a un *único modo de deducción*⁹.

Los testimonios anteriores parecen invitar a «Estudios Filosóficos», atenta siempre a los acontecimientos más relevantes de la cultura sapiencial, a dedicar una modesta atención a este centenario y prestar un homenaje de reconocimiento al espíritu creador de *Begriffsschrift*. Es lo que me propongo realizar en las páginas que siguen, tratando también de infundir, si fuese posible, la preocupación y el gusto por la lec-

8. En 1880 E. Schröder hizo una recensión de *Begriffsschrift* en «*Zeitschrift für Mathematik und Physik*», 25, Historisch-literarische Abtheilung, pp. 81-94. Ahí se comparaban las notaciones de Frege y Boole con notable desventaja para el primero. El lógico de Wismar contestó, en el mismo año, con el artículo *Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift*, que se negaron a imprimir sucesivamente cuatro revistas alemanas y debió pasar inédito a la herencia literaria del filósofo. Actualmente está publicado en G. FREGE, *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Vol. I: *Nachgelassene Schriften*, Hamburg, F. Meiner, 1969. Sin embargo, dos años más tarde, publicó *Ueber den Zweck der Begriffsschrift* en el anuario «*Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft für das Jahr 1882*», pp. 1-10, donde vuelve sobre el tema en defensa de su propia notación. Más tarde veremos las razones de Frege para esta defensa.

9. *Begr.*, Vorwort, p. XIII. Explicaremos más adelante el sentido que tiene esto para Frege.

tura de Frege, su dedicación a la investigación, el esfuerzo por superar las apariencias, la audacia en la creatividad y la paciencia en la derrota.

II. PROBLEMA Y PROGRAMA QUE PROVOCAN LA OBRA

1. *Reto al historiador.* En 1874 sorprendemos a Frege enseñando Matemáticas en la universidad de Jena, como *Privatdozent*, decidido a consagrar su vida a la investigación y a la docencia¹⁰. Había nacido en 1848 en la pequeña ciudad de Wismar, al nordeste de Hamburgo, sobre la bahía de Mecklenburger. No tengo intención alguna de recorrer las etapas de sus veinte primeros años, quemados en buena parte en el gimnasio de Wismar. Me interesa destacar más bien su formación universitaria. No era fácil elegir los centros más apropiados, precisamente por su abundancia y alta calidad. De todos modos escogió Jena (1869-71) y Gotinga (1871-74). Frecuentó principalmente cursos de matemáticas, física, química y filosofía. Desde el primer momento se siente inclinado hacia la Ciencia y la Filosofía, centrándose particularmente en el área de la Matemática y en el mundo de la Lógica. Años más tarde L. Wittgenstein (1889-1951) se sorprenderá de que Frege sólo sabía hablar de Lógica y Matemáticas¹¹.

Gotinga no podía jactarse de grandes tradiciones universitarias (sólo desde 1737), pero a mediados del siglo pasado podía exhibir una formidable biblioteca y fuertes facultades en el campo físico-matemático. En 1852 R. Dedekind (1831-1916) recibía el doctorado de manos del viejo maestro K. F. Gauss (1777-1855), que impartía lecciones en Gotinga desde 1807. G. Cantor (1845-1918) pasó también por sus aulas, y D. Hilbert (1862-1943) comenzaría allí su profesorado en 1895, prolongándolo hasta 1930. Puede decirse que por *Jena* habían desfilado, ya como estudiantes o profesores, todos los grandes pensadores del movimiento filosófico germano del diecinueve. Se respiraba un am-

10. En las universidades alemanas de la época, un joven doctor interesado por la enseñanza, después de obtener la *venia docendi* con un escrito, se convertía en *Privatdozent*; en una especie de docente libre, sin sueldo oficial. Si tenía éxito ante los estudiantes, después de un período prudencial, pasaba a *Profesor Extraordinario* y finalmente a *Ordinario*. La actividad académica de Frege se concentró exclusivamente en Jena. En 1879 consiguió la categoría de *Extraordinario*, en 1896 la de *Ordinario*, y pasó al retiro total en 1917.

11. Cf. G. E. M. ANSCOMBE & P. T. GEACH, *Three Philosophers. Aristotle, Aquinas, Frege*, Oxford, B. Blackwell, 1961, p. 130.

biente mucho más liberal que en Gotinga. Tenía fama, entre las universidades alemanas, de acoger con simpatía las nuevas ideas. Los amigos de K. Marx (1818-1883) le aconsejaron presentar su tesis doctoral en Jena (1841), huyendo precisamente de la universidad de Berlín, mucho más expuesta al control gubernamental.

Gotinga y Jena transmitieron sin duda al joven Frege una amplia información de los problemas más avanzados en Filosofía y Ciencia, así como el gusto por la creatividad, perdiendo el miedo a posibles rupturas con costumbres inveteradas. De todos modos la repentina aparición de *Begriffsschrift* en 1879 iba a demostrar que la apertura a las nuevas ideas tenía límites más bien estrechos. Veremos a Frege quejarse amargamente a este respecto de todo el ámbito cultural alemán.

La génesis de esta obra se presenta como un reto al historiador; hasta hemos visto a Lukaszewicz renunciar a una explicación plausible. Yo creo que esto es exagerado. Sin hacer cábalas ni consideraciones inútiles sobre los partos intelectuales, nunca sometidos a reglas, a modos determinados de conducta, opino que podemos identificar al menos el clima que los provocan. En este caso el clima se traduce en un *problema* y un *programa* bien definidos: El mismo Frege ha diseñado claramente las líneas maestras de su problema y su programa, de donde infero que nos ha indicado sin ambigüedad las motivaciones propias que le obligaron a escribir su obra. Veamos a grandes rasgos su planteamiento.

Contamos al menos con tres escritos de Frege anteriores a 1879, como puede comprobarse en la nota bibliográfica dada más abajo. No he tenido ocasión de hojearlos, pero a juzgar por los títulos y fiándonos del testimonio de otros autores, no parece que surja ahí el ambiente apropiado en que se desenvuelve *Begriffsschrift*. Tienen un carácter científico, se ocupan principalmente de asuntos geométricos. De todos modos no debemos pasar inadvertido un detalle importante. Es muy posible que estudiando los conceptos de magnitud (objeto en parte del segundo escrito) y el lenguaje en que se expresan descubriera el papel epistemológico de los *signos-letras*. No digo variables, pues es un término que Frege evita cuidadosamente¹². Los intereses que le movieron a publicar *Begriffsschrift* están magníficamente declarados en el Prefacio de la misma obra. Procuraré ilustrarlos también con lugares de escritos posteriores sin violentar las genuinas posiciones primitivas.

12. Cf. *Begr.*, 1, p. 1.

2. *Génesis inventiva y fundacional de proposiciones*. En el citado Prefacio se apunta, en primer lugar, a problemas epistemológicos y metodológicos *generales*, que hay que tener muy en cuenta para entender bien el *caso especial de la Aritmética*.

Quien está empeñado en la noble tarea del saber se esfuerza por engendrar *proposiciones verdaderas*, separándolas cuidadosamente de las falsas. Es la preocupación epistémica máxima. En un primer momento del vez se adivina, se tiene un leve atisbo de su verdad, para pasar después gradualmente a consolidarlas más y más o desecharlas. Este disciplinado quehacer obliga a interrogarse en un doble sentido. Podemos preguntar, ante todo, por la *génesis inventiva* de las proposiciones verdaderas. ¿Cómo ha nacido la proposición *P*? Para el lógico de Wismar no se trata de una cuestión determinada, porque no admite una, dos, o un número fijo de respuestas. Los nacimientos los provoca siempre un sujeto vivo. Si especificamos este sujeto el problema anterior se disocia en miles de formas. ¿Quiénes, cómo, bajo qué circunstancias han sido los primeros hombres en engendrar las distintas proposiciones de la física actual? ¿Ese fatigoso dar a luz ha dependido de los modos concretos de producción de determinadas comunidades humanas? Es claro que al lado de esta *génesis histórica integral* cabe alinear las innumerables *historias individuales* de cada físico.

A este tipo de curiosidades se unen fácilmente otras del *género pedagógico*. ¿Es fértil un muchacho de catorce años para engendrar tales y tales tipos de proposiciones? ¿Cómo le podemos ayudar en sus partos? Es más fácil todavía derivar hacia preocupaciones del *género psicológico*, una vez que nos sumergimos en la descripción de representaciones, motivaciones, actitudes, amores o fobias.

Nunca he leído en Frege que estas cuestiones no fueran interesantes, como parecen apuntar algunos comentaristas del filósofo. Sólo afirma que no son interesantes, más aún, son completamente inútiles para la tarea epistemológica de discernir la verdad o falsedad de las proposiciones¹³. Si quisiéramos discutir a fondo éste y otros puntos semejantes de la metodología freguiana, nos veríamos obligados a salirnos del marco propio de este trabajo. Sólo quiero indicar que el rechazo de la *génesis inventiva* se resume en esta regla: «...es ist das Psychologische

13. *Begr.*, Vorwort, p. IX-X. *Grundl.*, Einleitung, pp. XVII-XX; 3, pp. 3-4; 58-61, pp. 69-72. *Grundg.*, Vol. I, Vorwort, pp. XIV-XXVI. G. FREGE, *Ueber das Trägheitsgesetz*, en «Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik», 98 (1891), pp. 145-161. El lugar *ad hoc* de este último escrito puede verse en Mangione, pp. 355-358. Consúltese también Mangione, *La seconda lettera a D. Hilbert*, pp. 468-69. Tecnos, *La Lógica en la Matemática*, pp. 124-26.

von dem Logischen, das Subjective von dem Objectiven scharf zu trennen»¹⁴. A este respecto no podemos ligar a Frege con la tradición metodológica proveniente de Descartes, Bacon, Mill, e incluso Kant. El lógico de Wismar tiene mucha más afinidad con Leibniz cuando afirma: «no se trata de la historia de nuestros descubrimientos, que es diversa en los distintos individuos, sino de los lazos y orden natural vigente entre las verdades, que es siempre el mismo»¹⁵.

Aparte de la génesis inventiva tenemos derecho a preguntar también por la *génesis fundacional* de las proposiciones verdaderas. ¿Cómo encontrar una base más sólida para la proposición P ? Desde las primeras líneas de *Begriffsschrift*, Frege no ve otro modo de solucionar el problema que ensambiar P con otras proposiciones verdaderas a través de *cadena deductivas*. Esto puede realizarse de dos maneras. Un modo consiste en derivar de P n proposiciones que encuentran confirmación de su verdad por otros caminos. Digamos que en este caso se fundamenta la verdad de P por la fertilidad que brota de su seno. No he visto a Frege desarrollar a lo largo de sus obras este aspecto de la metodología. Desde luego, por más importante que resulte, no tiene a su favor ni una ley lógica que lo respalde¹⁶.

Otro modo de dar consistencia a P tiene lugar al deducirla de otras proposiciones más basilares que ella. Aquí es donde las leyes lógicas pueden garantizar la verdad de P , siempre que sean verdaderas las proposiciones de donde se deriva. Habiéndose empeñado continuamente en Matemática y en filosofía de la Matemática, es natural que Frege adoptara esta vía fundacional de proposiciones.

3. *Clasificación de proposiciones por su génesis fundacional*. Apoyándose en la citada génesis fundacional del segundo tipo, el filósofo alemán ha llegado a dar una notable interpretación a la famosa clasificación de las proposiciones en analíticas-sintéticas, a priori-a posteriori. En el Prefacio a *Begriffsschrift*¹⁷ se apunta claramente la línea divisoria, pero se hace de un modo más completo y cabal en *Grundlagen*¹⁸. No tenemos más remedio que considerarla al detalle, pues es decisiva para entender de lleno el problema y el programa especiales

14. *Grundl.*, Einleitung, p. XXII. Cfr. *Ibid.*, 26-27, pp. 33-38; 106, pp. 115-116.

15. Citado por el mismo Frege en *Grundl.*, 17, p. 23.

16. Tal vez puedan contarse como interesantes indicaciones a este tipo de método las observaciones de *Grundl.*, 17, p. 23.

17. *Begr.*, Vorwort, p. IX.

18. *Grundl.*, 3, pp. 3-4; 12, pp. 17-19; 90, pp. 102-103.

que provocan la construcción de *Begriffsschrift*. Frege afirma de entrada que la nombrada clasificación no concierne al *contenido* de las proposiciones, sino a su justificación, a la *génesis fundacional*. Por esto precisamente no podemos hablar de errores a priori, ya que no pueden tener base fundacional alguna. «Un error a priori es tan no-ser como un concepto azul»¹⁹.

Así pues, una *proposición P es analítica*, si y sólo si, se deriva exclusivamente desde *leyes generales lógicas* y *con ayuda a veces de definiciones*. Las definiciones en nada cambian la situación en cuanto a contenido, ya que representan abreviaturas de expresiones que se mantienen en la pura generalidad lógica. Una *proposición P es sintética*, si y sólo si, *no se deriva exclusivamente de leyes generales lógicas*; en su fundamentación intervienen proposiciones pertenecientes *al campo de un saber particular*. Una *proposición P es a posteriori*, si y sólo si, no es posible demostrarla *sin apelar a hechos*, es decir, a proposiciones *indemostrables privadas de generalidad* que enuncian algo sobre determinados objetos. Una *proposición P es a priori*, si y sólo si, se deriva exclusivamente de *leyes generales indemostrables*.

Advierto al lector que no se incline fácilmente a identificar lo analítico y a priori, ya que las leyes generales pueden ser lógicas y no lógicas. Tampoco deben hacerse equivalentes sintético y a posteriori, pues lo sintético ni incluye ni excluye la apelación última a hechos. Está claro, en cambio, por las mismas definiciones, que analítico-sintético, a priori-a posteriori se excluyen mutuamente. No hay proposiciones analíticas sintéticas, a priori a posteriori. Luego matemáticamente están permitidas las combinaciones siguientes: *analíticas a priori*, analíticas a posteriori: *sintéticas a priori*, *sintéticas a posteriori*. La segunda combinación no tiene lugar, puesto que lo analítico a posteriori, según las definiciones dadas, es un concepto perfectamente contradictorio.

Nos quedamos, por consiguiente, con tres subclases de proposiciones por razón de la *génesis fundacional*. Las *analíticas* se recrean en cadenas deductivas exclusivamente lógicas; son de naturaleza lógica; pertenecen al pensamiento puro, como suele decir Frege. Más tarde veremos el significado preciso de semejante pureza. Las *sintéticas a priori* se ensamblan en sistemas de proposiciones generales, pero no alcanzan la universalidad propia del mundo lógico. Hay en ellas conceptos de tipo más restringido, como pueden ser las categorías kantianas. Las *sintéticas a posteriori* habitan en estructuras proposicionales, donde

19. *Ibid.*, 3, p. 3.

aquí o allá hay referencia a hechos. Intervienen conceptos como luna o estrella de la mañana que apuntan a objetos observables²⁰.

4. *Problema y programa específicos.* Ha llegado el momento de precisar el *problema y programa especiales* que provocaron la *Begriffsschrift*. El mismo Frege afirma taxativamente: «Die Arithmetik, wie ich in Anfange bemerkt habe, ist der Ausgangspunkt des Gedankenganges gewesen, der mich zu meiner Begriffsschrift geleitet hat»²¹. Para el filósofo de Wismar la *Aritmética* consiste principalmente en un conjunto de *proposiciones verdaderas*. Ordinariamente las llama *leyes* (Gesetze), de las cuales unas se refieren a números naturales particulares (Zahlformeln), v. gr. $2 \times 5 = 10$; otras abarcan a todos ellos (allgemeine Gesetze), como $a \times b = b \times a$ ²². El único asunto que interesa a Frege de todas esas innumerables leyes es el de su *génesis fundacional*. ¿Por qué se han de admitir como verdaderas? ¿Basándonos en su perfecta evidencia? ¿O son demostrables? ¿Son demostrables apelando a hechos? ¿Demostrables desde verdades generales de tipo geométrico o lógico?

La reflexión que hace a este respecto en *Grundlagen* es exhaustiva mucho más profunda y *ad hoc*, a mi modesto juicio, que ningún filósofo anterior, incluido el propio Kant. Por eso tal vez no sería lícito trasladar a 1879 la madurez conseguida en 1884. Pero está claro que en 1879 tiene planteado el problema con toda su crudeza, y manifiesta también su decisión por dar a las proposiciones aritméticas la *máxima garantía*. En *Grundlagen* desecha la base de la evidencia, así como su fundamentación última en hechos, o en proposiciones sólo relativamente generales. Cree, en suma, que necesitan demostración, que no son sintéticas a posteriori ni a priori, sino pura y simplemente analíticas. Luego, según las definiciones dadas más arriba, son de *naturaleza lógica*. Queda así establecida la *tesis logicista*, convertida al mismo tiempo en un *programa reduccionista*. Hay que traducir los conceptos basales de la Aritmética a conceptos lógicos, hay que derivar todas sus leyes desde las leyes del pensamiento puro; hay sencillamente que *logificar la matemática* dando un fundamento más sólido y profundo a sus proposiciones.

20. Es posible que surjan en el lector dudas críticas sobre toda esta interpretación de lo analítico-sintético, a priori-a posteriori; perplejidades también sobre su alcance, etc. Pero no estamos en un momento crítico, sino puramente expositivo.

21. *Bgr.*, Vorwort, p. XIV.

22. *Grundl.*, 5, p. 5.

El programa reduccionista se lanza en *Begriffsschrift*, e incluso se indican las líneas maestras a seguir. Su primera etapa es el número natural. Desde aquí se pasaría a definir las distintas clases de números. Vendría después el trato de la magnitud y el resto. Para dar cuenta del número natural necesita propiedades generales relativas a las series. Esto, por consiguiente, es lo primero que hay que traducir a términos lógicos. La tarea se realiza, en parte, en la tercera sección de *Begriffsschrift*, exponiendo tales propiedades en términos de consecuencia lógica (logische Folge)²³. Frege cree haber hecho *plausible* el citado programa en *Grundlagen*, al lograr definir el número natural en categorías lógicas²⁴. Tiene conciencia de *haberlo realizado* en *Grundgesetze*²⁵. Es conveniente que hagamos siquiera breves alusiones a la inserción del programa reduccionista en el ambiente de la época, para destacar más la genuina originalidad de *Begriffsschrift*.

5. *La originalidad está en el desarrollo del programa.* El programa reduccionista no resulta extraño al ambiente que se respiraba en *Matemática* alrededor de 1875. Los matemáticos del diecisiete y del dieciocho vivieron en un espíritu febril de *génesis inventiva*, sobre todo a partir del descubrimiento del Análisis por obra de I. Newton (1643-1727) y G. Leibniz (1646-1716)²⁶. Descuidaron demasiado la preocupación por dar bases sólidas a sus inventos, aunque esto no creo que pueda decirse sin matizaciones de Leibniz. Movidos por dificultades internas y por el deseo de construir mejor la disciplina, C. F. Gauss y A. L. Cauchy (1789-1857) principalmente dieron la voz de alarma y la consigna de *vuelta al rigor*. La consigna tuvo un formidable eco a través del siglo diecinueve, pues vemos a los mejores cerebros completamente impregnados del espíritu propio de la *génesis fundacional*. No queremos decir con esto que se agotó la *génesis inventiva*. Para desmentirlo ahí están las geometrías no-euclídeas, las álgebras simbólicas, los cálculos lógicos y la teoría de conjuntos.

Frege describe en estos términos el clima de vuelta al rigor. El rigor se acentúa sobre todo en el Análisis y en la misma Aritmética, tanto por lo que se refiere a *demostraciones* como a *conceptos*.

23. *Begr.*, Vorwort, p. X y XIV; 23, p. 55.

24. *Grundl.*, 87, p. 99; 109, p. 118.

25. *Grundg.*, Vol. I, Vorwort, p. VII; Einleitung, p. 1.

26. Una historia detallada del descubrimiento con sus avatares polémicos puede verse en A. PÉREZ DE LABORDA, *Leibniz y Newton. Vol. I: La discusión sobre la invención del cálculo infinitesimal*, Salamanca, Universidad Pontificia, 1977.

En las demostraciones hay preocupación por fijar los límites de validez de los teoremas, por clarificar la dependencia de los mismos entre sí tratando de descubrir las verdades fontales (Urwahrheiten) de todo el sistema, e incluso se tiende a probar proposiciones que se dicen ser evidentes. Pero la validez de las demostraciones depende mucho de los conceptos que intervienen en las proposiciones demostrables. Por eso la crítica y el rigor han alcanzado a las nociones de *función, continuidad, límite, infinito, número negativo e irracional*. La vuelta es para Frege un retorno al modo euclídeo de hacer matemática, tratando de superar los hábitos del griego²⁷.

Los resultados de esta lucha por la génesis fundacional no se hicieron esperar, por obra principalmente de C. Weierstrass (1815-1897), R. Dedekind, H. C. Meray (1835-1911) y G. Cantor. Es lo que ordinariamente se llama la *aritmización de la matemática clásica*²⁸. Carnap, en sus buenos años de euforia sintáctica, interpretaba así este hecho: «a lo largo del siglo pasado, los matemáticos descubrieron que todos los signos matemáticos pueden definirse sobre la base de los signos de la teoría de los números naturales»²⁹. De todos modos el rigor no se difundió tan fácilmente entre los profesionales. Todavía en los años noventa del siglo pasado, y en pleno Cambridge, B. Russell tenía la impresión que «las pruebas que se daban de los teoremas matemáticos eran un insulto a la inteligencia lógica»³⁰.

A la vista de estas breves indicaciones, está claro que la tesis y el programa reduccionista, la *logificación de la matemática clásica*, se presenta como una simple ampliación de la lucha de generaciones de matemáticos por hallar bases para su ciencia totalmente fiables. Me parece que Frege no se sentía en esto *tan original* como ordinariamente se le cree. En lógica formal pura, en cuestiones de semántica lógica, en aspectos metodológicos varios, se atribuye la originalidad con mucha más fuerza.

En 1884 afirma que «se encuentra de acuerdo con *aquellos* que consideran imposible trazar una clara línea divisoria» entre Lógica y Ma-

27. *Grundl.*, 1-2, pp. 1-2.

28. Consúltese a este propósito JAVIER DE LORENZO, *Introducción al estilo matemático*, Madrid, Tecnos, 1971. ID., *La filosofía de la matemática de Jules Henri Poincaré*, Ibid., 1974. ID., *La matemática y el problema de su historia*, Ibid., 1977. N. BOURBAKI, *Elementos de historia de las matemáticas*. Versión española de J. Hernández, Madrid, Alianza Editorial, 1972.

29. R. CARNAP, *Foundations of Logic and Mathematics*, Chicago & London, University of Chicago Press, 1963¹⁰, p. 48.

30. B. RUSSEL, *La evolución de mi pensamiento filosófico*. Versión española de J. Novella Domingo, Madrid, Aguilar, 1960, p. 30.

temática³¹. Opina que «este género de fundamentos *está ya como en el aire*, que uno a uno y al menos en forma aproximada han sido quizás enunciados todos; podrían, sin embargo, aparecer nuevos en la dependencia mutua con que los presento». En este mismo lugar manifiesta su admiración por la coincidencia en unos puntos y el desacuerdo en otros con importantes autores³². «Se ha *declarado muchas veces*, escribe en otra parte, que la Aritmética no es más que una Lógica desarrollada»³³.

La genuina originalidad de Frege está en el desarrollo del programa reduccionista, presentándose como primer fruto maduro del mismo la *Begriffsschrift*. Muy pronto se dio cuenta que la logificación de la Aritmética exigía sendas reflexiones en el campo de la Filosofía, la Matemática y la misma Lógica. «Una profunda investigación sobre el concepto de número resultará ser siempre algo de tipo filosófico; se trata de una empresa común a la Matemática y a la Filosofía»³⁴. Grandes matemáticos sin perspicacia filosófica se contentarán con soluciones superficiales; filósofos ignorantes del hacer matemático se perderán en inútiles elucubraciones; matemáticos y filósofos privados de espíritu y herramientas lógicas no podrán calibrar nunca la solidez de sus construcciones.

6. *Matemáticos, filósofos y lógicos frente al programa reduccionista*. Hay que confesar abiertamente que nadie logró contentar a Frege en este punto, a excepción tal vez del gran Leibniz. Los lógicos le resultaron excasamente lógicos, los matemáticos muy poco filósofos y parcialmente lógicos, los filósofos excesivamente pobres en matemáticas y lógica. Se diría que sólo él fuese capaz de llevar el programa a buen término. Quien no haya calado en esto creo que tampoco puede entender el nacimiento de *Begriffsschrift*; se perderá en consideraciones más o menos marginales³⁵. ¿Qué fallos veía Frege en matemáticos, filósofos y lógicos?

La famosa vuelta al rigor, orgullo de los matemáticos del diecinueve, no se ha realizado aún a satisfacción de Frege. Debía haber escrito

31. *Grundl.*, Einleitung, p. XXI. El subrayado es mío.

32. *Ibid.*, p. XII. El subrayado es mío.

33. *Grundg.*, Vol. I, Vorwort, p. VII. El subrayado es mío.

34. *Grundl.*, Einleitung, p. XVII.

35. Así creo que le ocurre a CHRISTIAN THIEL, *Sentido y referencia en la lógica de Gottlob Frege*, Madrid, Tecnos, 1972, p. 17 ss. A pesar de su gran conocimiento de Frege, no encuentro oportuno enlazar sin más la *Begriffsschrift* con Leibniz, sin pasar antes por el programa reduccionista, como por un camino obligado.

un opúsculo que se titulara algo así como *Contra mathematicos*. Los ve deficientes en lo que podríamos llamar *espíritu sapiencial*, en los modos de *definir*, en los *procesos demostrativos* y en su *concepción ontológica* del mundo.

La falta de *espíritu sapiencial* se manifiesta de diversas maneras. Se evidencia, ante todo, en no darse cuenta de la *propia ignorancia*. Creen muchos que hay claridad suma y total convergencia de opiniones sobre conceptos elementales como cero, uno, dos, número entero positivo, leyes fundamentales aritméticas, paso de n a $n+1$, etc. «Falta así muy a menudo la primera condición del aprender: saber que no se sabe» (das Wissen des Nichtwissens)³⁶. No hay que pensar inmediatamente en los «manualistas». El lógico de Wismar achaca brutalmente esta falta de espíritu sapiencial a C. *Weierstrass*, a la vez que le considera «excelente matemático»³⁷.

Otra patente carencia del mismo espíritu aparece en la *estrechez de miras* y en la *superficialidad*. Apenas se oyen expresiones como «concepto», «relación», «juicio», muchos matemáticos piensan: «*metaphysica sunt, non leguntur!*». Otros, como el señor E. *Schröder* en el *Algebra de la lógica*, empeñados en descubrir las raíces del árbol aritmético, apenas han alcanzado un codo de profundidad, efectúan de pronto un giro hacia la copa entreteniéndose en el desarrollo de métodos y teoremas³⁸. Tampoco brilla el espíritu sapiencial en aquellos matemáticos que se interesan exclusivamente por el *contenido del teorema demostrado*, pasando así por alto los fundamentos que lo sostienen. Convencidos de la fijeza de una roca por haber tratado inútilmente de removerla, podemos aún preguntar por las bases que la mantienen con tanta firmeza³⁹.

Vengamos ahora a recopilar algunas *deficiencias en las definiciones*. De ellas depende el rigor de los conceptos que se asumen, lo cual implica sin más fijar límites precisos. Esto último quiere decir simplemente que se sabe de cualquier objeto si cae o no bajo un concepto dado. Frege atribuye en general a los matemáticos la adopción de *conceptos pobres y enfermizos*. No acabamos de enterarnos, por ejemplo, de lo que R. *Dedekind* quiere designar con la palabra «sistema» o E. *Schröder* con la expresión «clase»⁴⁰. Le pasa lo mismo a G. *Cantor*

36. *Grundl.*, Einleitung, p. XV.

37. *Tecnos*, *La lógica en la matemática*, p. 101.

38. *Grundg.*, Vol. I, Vorwort, pp. XII-XIII. Se refiere aquí Frege a las famosas *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Leipzig, 1890-1895.

39. *Grundg.*, Vol. I, Vorwort, p. VIII; *Grundl.*, 2, p. 2.

40. *Ibid.*, Einleitung, pp. 1-3.

cuando trata de determinar el significado de «infinito potencial», «conjunto», «número cardinal», «ordinal»⁴¹. La miseria suprema en el concepto de número entero positivo aparece en *C. Weierstrass*⁴². Frege echa en cara también a los matemáticos de adoptar como auténticas definiciones lo que no pasan de ser descripciones de *procesos psicológicos, histórico-genéticos o simplemente pedagógicos*⁴³. Así *R. O. S. Lipschütz* (1832-1903) y *O. Schlömilch* (1823-1901) confunden lamentablemente un número natural con determinadas representaciones subjetivas; *E. Schröder* apela a la memoria o al papel para explicar la validez de un axioma⁴⁴.

El lógico de Wismar tampoco está de acuerdo con la *justificación a posteriori* de las definiciones. La mayor calamidad de un concepto introducido en un sistema es que nos lleve tarde o temprano a contradicciones. Habrá que asegurarse bien de que él mismo no sea contradictorio. La mayoría de los matemáticos, sin embargo, se contenta con una justificación empírica, apuntando sencillamente al hecho de que hasta ahora no han saltado a la vista contradicciones. No hay que confundir esta actitud con la discusión mantenida entre Frege y Hilbert a propósito de las definiciones implícitas⁴⁵.

El filósofo germano condena también el uso muy extendido entre los matemáticos de las *definiciones fragmentarias* (stückweisen Definirens). Consiste en dar una explicación (Erklärung) de un signo para un campo determinado de objetos, v. gr. los números naturales, prosiguiendo después con una segunda explicación para otro campo, por ejemplo para los números enteros. De ese modo el signo en cuestión no adquiere jamás una determinación unívoca. Si no surgen inconvenientes será por puro milagro⁴⁶.

Citemos, por último, el abuso de *creatividad*, una especie de poder mágico atribuido a las definiciones. El geógrafo no crea mar alguno cuando traza fronteras y llama a la porción limitada «Mar Amarillo». Lo mismo le pasa al matemático cuando define sus objetos. Sólo una

41. *Mangione, Recensione alla «Teoria del transfinito» de Georg Cantor*, pp. 414-417.

42. *Tecnos, La lógica en la matemática*, pp. 94-104. Frege critica a continuación los conceptos comunes de *igualdad, suma, relación, función*.

43. *Grundl., Einleitung*, p. XX; 58-61, pp. 69-72.

44. *Ibid.*, 26, p. 33; 27, p. 37; *Einleitung*, p. XX.

45. *Ibid.*, *Einleitung*, p. XXI. Para la discusión con Hilbert consúltese *Mangione, Carteggio Frege-Hilbert*, pp. 453-473.

46. *Grundg.*, Vol. II, 57, p. 60. Cf. *Tecnos, La lógica en la matemática*, pp. 124-126.

superstición científica puede hacer creer que se dota de nuevas propiedades a los objetos al definirlos. De ese modo no habría tampoco inconveniente en hacer de un estudiante perezoso uno aplicado⁴⁷.

La célebre vuelta al rigor no ha sido tampoco suficiente, a juicio del filósofo alemán, en los *procesos demostrativos*. Se encuentran en ellos al menos tres tipos de lagunas. En primer lugar el matemático no hace esfuerzo alguno por *codificar los modos de deducción* que emplea. Si bien Frege no tiene escrúpulo en denominar euclídeo a su propio proceder matemático, en este aspecto determinado tampoco teme declarar: «...und darin gehe ich über Euclid hinaus...». Así, por ejemplo, en el libro «más profundo que he conocido en los últimos tiempos sobre la fundamentación de la Aritmética», no se encontrará codificación alguna de leyes lógicas. Se refiere a *Was sind und was sollen die Zahlen?* de R. Dedekind⁴⁸.

Los matemáticos no suelen explicitar, en segundo lugar, *todos los principios que utilizan en las pruebas*. De este modo es muy fácil suponer a su vez algo que necesita demostración, quedando también sin base real el teorema que se intentaba probar y todos los que dependen de él. Frege alude a lo mucho que comprende el libro de Dedekind en poco espacio, pero eso sólo se consigue dejando la mayor parte sin demostrar. El mismo *Leibniz* intentó probar la proposición $2+2=4$, creyendo suponer tan sólo la definición de 2 y la regla de sustitución de idénticos, cuando en realidad usa también la ley $a+(b+c)=(a+b)+c$ ⁴⁹. La tercera laguna procede de *no resolver una prueba* en los pasos simples de que se compone, dando a veces saltos mortales. La tarea demostrativa se hace ciertamente dura y larga, pero no hay que medir la fuerza y la longitud de una prueba con la vara⁵⁰.

Aparte de la falta de espíritu sapiencial, del rigor en definiciones y pruebas, los matemáticos manifiestan un tipo de *deficiencia ontológica* con grandes repercusiones para la interpretación de su ciencia. No acaban de distinguir entre *objeto* y *concepto*. Se tiende a admitir solamente como existente lo sensible, pero los conceptos no están al alcance de los sentidos. Ahora bien, los números no son objetos, ni representaciones psicológicas, sino propiedades de conceptos. No son, por consiguiente, entes sensibles. Si pues, los números no se encuentran alineados con seres sensibles como las plantas o los animales, ni per-

47. *Grundg.*, Vol. I, Vorwort, pp. XIII-XIV.

48. *Ibid.*, pp. VI-VIII; Einleitung, p. 1.

49. *Grundl.*, 6, p. 7.

50. *Grundg.*, Vol. I, Einleitung, p. 1; Vorwort, p. VIII.

tenecen a mi subjetividad, ni se les reconoce como propiedades de conceptos, no es extraño que se les identifique con los *signos numéricos*. Así hacen efectivamente los formalistas exagerados del diecinueve⁵¹. Esta incapacidad para distinguir el signo de lo designado, sobre todo cuando éste se encuentra en el área de lo suprasensible, le llama Frege en una ocasión «morbus mathematicorum recens»⁵².

La situación de los *filósofos frente al programa reduccionista* es bastante peor que la de los matemáticos. De todos modos habría que separar aquí la tradición filosófica más afín a Frege del ambiente reinante en la segunda mitad del siglo pasado. Por supuesto que se refiere siempre a una filosofía que pueda dar cuenta de los fundamentos de la Aritmética. Creo que dos filósofos han contribuido eficazmente a la concepción del programa reduccionista. Prescindo enteramente de la relación a B. Bolzano (1781-1848), ya que no se puede caminar más allá de la conjetura. En una línea de contribución positiva hay que citar, ante todo, a I. Kant (1724-1804). Frege apreciaba y admiraba al filósofo de Monterrey; tiene siempre presente sus soluciones, pero tuvo también la valentía de apartarse abiertamente de sus opiniones sobre la Aritmética. Kant nada influye en el desarrollo del programa, pero ha resultado un gran apoyo para el planteamiento exacto del problema que conduce a él. Como hemos visto más arriba, y baste esta indicación, todo el engranaje de la génesis fundacional de las proposiciones aritméticas está concebida en neta terminología kantiana, aunque interpretada al estilo freguiano.

Quien contribuye más al desarrollo del programa es Leibniz. Tal vez fue el lejano inspirador (nada más) de la *Begriffsschrift*, ya que el mismo Frege cree haber realizado para el campo de la Lógica el sueño dorado de una «lingua característica» para todo el pensamiento⁵³. El filósofo de Leipzig piensa también que las fórmulas numéricas, v. gr. $2+2=4$, son demostrables, en perfecta concordancia con Frege⁵⁴. Anteriormente vimos también cómo ambos coincidían en insistir sobre la génesis fundacional de las proposiciones más que sobre su génesis inventiva. El filósofo de Wismar, por último, asume las «definiciones

51. *Grundg.*, Vol. I. Vorwort, p. XIII. *Grundl.*, Einleitung, p. XXII; 97, p. 108; 92 ss. Cf. *Tecnos, Sobre concepto y objeto*, pp. 60-72.

52. *Tecnos, La lógica en la matemática*, p. 104.

53. *Begr.*, Vorwort, pp. XI-XII. Cf. *Angelelli, Ueber den Zweck der Begriffsschrift*, p. 98.

54. *Grundl.*, ó, p. 7.

leibnizianas» de cada número fuera del 0 y el 1⁵⁵. Son cuatro detalles importantes para el programa.

El ambiente de la *filosofía oficial alemana* alrededor de 1880 apenas podía contribuir nada a una seria profundización de las bases de la Matemática. Frege lo veía enteramente contaminado de posiciones subjetivistas y psicologistas, preocupado mucho más por la génesis inventiva de los saberes que por la fundacional. Más arriba hemos hecho alusión a esto y hemos acumulado los lugares principales. No vamos a repetirlos aquí. En cambio puede resultar interesante traer a consideración dos muestras de filosofía de la matemática del tiempo.

Sea la primera de *H. Cohen* (1842-1918), el fundador de la escuela neokantiana de Marburgo, uno de los que secundan la consigna de *retorno a Kant*, pero que en realidad se encuentra aprisionado en el modo hegeliano de hacer filosofía. Poseemos una recensión de Frege sobre una obra suya en la que trata de interpretar el Análisis, especulando de un modo muy «filosófico» sobre la diferencial dx , el incremento infinitamente pequeño de x . El filósofo manifiesta ignorar los resultados de Weierstrass, Dedekind y Cantor a este respecto; confunde la Matemática con su aplicación; hace distinciones «cruciales» que no tienen importancia alguna en la construcción del sistema y desprecia conceptos claves como el de límite. Frege apunta con nostalgia que es difícil encontrar hombres con suficientes conocimientos en Matemática y Filosofía⁵⁶.

La segunda muestra se refiere a *E. Husserl* (1859-1938), fundador de la fenomenología. En 1891 publicaba su *Philosophie der Arithmetik - Psychologische und logische Untersuchungen*. Frege hace una minuciosa crítica del libro, concentrándose a la vez sobre los principios generales y las determinaciones particulares. La recensión es un trabajo maestro de serena profundidad, salpicada a veces de cierta ironía inofensiva. «Leyendo esta obra, termina Frege, he podido medir hasta qué punto se extiende la desolación provocada por la intrusión de la Psicología en la Lógica. Los errores, que he creído un deber manifestar, son menos imputables al autor que a una enfermedad filosófica am-

55. *Ibid.*, 55, p. 67.

56. *Mangione, Recensione a «Il principio del metodo infinitesimale e la sua storia» di Hermann Cohen*, pp. 406-411. El título original de la obra es *H. COHEN, Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte*, Berlin, Dümmler, 1883.

pliamente difundida»⁵⁷. Es curioso ver tachado de psicologismo al filósofo que más lo ha combatido.

Fuera del ámbito de la filosofía alemana se encontraba el empirismo británico, a la sazón dignamente representado por *J. S. Mill* (1806-1873). En 1843 apareció en Londres su obra capital *System of Logic, Ratiocinative and Inductive*. En los libros II, c. VI, 2-3 y III, c. XXIV, 5, Mill aventura una interpretación de los enunciados aritméticos y de los números naturales respectivamente. De nada sirvió a Frege para desarrollar su programa. Llegará a decir con desprecio que el filósofo inglés fundamenta una «Aritmética de alajúes y chinitas. No faltaría otra cosa que atribuir también al gusto de los alajúes un significado especial para el concepto de número»⁵⁸. Es una pena lo ocurrido a este respecto. Mill perdió totalmente de vista la perspicaz filosofía de D. Hume (1711-1776) sobre los entes matemáticos; Frege, a mi juicio, no conoció al filósofo de Edimburgo, quien hubiese contribuido muy positivamente a la tesis logicista.

Terminemos esta referencia a los filósofos con dos advertencias. El mayor inconveniente que ve Frege a las especulaciones filosóficas de la época sobre la Aritmética es que ni se emplean, ni sirven de nada para la construcción de la misma. El filósofo alemán quiere una filosofía de la Matemática que conduzca eficazmente al nacimiento y desarrollo de la disciplina. Señala también, como gran desventaja, el miedo, tal vez fobia, que sienten los filósofos ante las notaciones simbólicas. Apenas ven una fórmula exclaman: «*mathematica sunt, non leguntur!*»⁵⁹.

¿Y qué podía contribuir la *lógica oficial* de 1875 al *programa reduccionista*? Se diría que estaba aún en peor situación que filósofos y matemáticos. No se trata aquí de arrojar sobre el tapete cada una de sus calamidades, alargando este discurso inútilmente. Me refiero tan sólo a la crítica freguiana. La lógica participa del clima general filosófico; está impregnada del atractivo afán por la *descripción psicológica*, y tiene a gala perderse en altas *especulaciones metafísicas*. Apenas hacía sesenta años que Hegel había publicado la *Ciencia de la Lógica*, marcando así uno de los hitos del poder reflexivo del hombre, pero que nada tiene que ver con la Lógica propiamente dicha. La ingerencia en el cuerpo de esta disciplina de todo tipo de elementos extraños se hizo gradualmente a partir de los humanistas.

57. *Mangione, Recensione alla «Filosofia dell'aritmética» di Edmund Husserl*, pp. 418-437.

58. *Grundl.*, Einleitung, p. XIX. Cf. *Ibid.*, 7-9, pp. 9-14; 23-25, pp. 29-33.

59. *Grundg.*, Vol. I, Vorwort, p. XII.

En 1787 Kant describía así el medio ambiente: «Cuando algunos autores modernos sueñan en extender los dominios de la Lógica, intraduciendo en ella capítulos de *Psicología* relativos a la diversidad de facultades cognoscitivas (imaginación, ingenio); o bien de *Metafísica* sobre el origen del conocimiento, de los distintos tipos de certeza conforme a las diferentes clases de objetos (idealismo, escepticismo, etc.); o, por último, de *Antropología* sobre los prejuicios (causas y remedios), sólo han dado pruebas de su ignorancia sobre la naturaleza propia de esta ciencia»⁶⁰. La situación para el área británica, hacia mediados de siglo, está bien matizada en *Lectures on Logic*, III, p. 29 ss. de W. Hamilton (1788-1856). Tanto Kant como Hamilton reflejan lo que algunos historiadores de la disciplina llaman «lógica clásica», enormemente empobrecida respecto de la escolástica y griega⁶¹.

En este espíritu hay que leer y valorar la tremenda crítica que dirige Frege a la *Logische Elementarlehre* (1892-1907) de B. Erdmann, una obra que resume bien los defectos de la lógica «clásica». Apunta aquí dos cosas importantes. Pide, ante todo, para la Lógica una completa autonomía. «Mantengo como señal inequívoca de error el que la Lógica tenga necesidad de la Metafísica y Psicología, ya que estas mismas ciencias precisan de principios lógicos. ¿Dónde está el suelo originario y propio sobre el que descansa todo? ¿O va a ocurrir aquí como en el cuento de Münchhausen, que él mismo se sacaba del pantano tirándose del moño?». Por otra parte la lógica psicologista es torpe para apreciar finas diferencias de corte netamente lógico. No distingue, por ejemplo, entre característica, nota (Merkmal) y propiedad (Eigenschaft) de un concepto; entre objeto (Gegenstand) y concepto (Begriff); entre conceptos de primero y segundo grado (Stufe)⁶².

Alguien puede pensar que estamos olvidando un hecho decisivo. En 1847 un joven matemático inglés, G. Boole, moviéndose en el espíritu del Algebra Simbólica desarrollada por Peacock (1791-1858), publica en Cambridge *The Mathematical Analysis of Logic*, donde se libera totalmente la disciplina de la Metafísica y la Psicología. ¿Es que no conocía Frege esta dirección? ¿No le servía? La conocía perfectamente, como puede comprobarse consultando la nota octava de este trabajo. Sin embargo no me extraña que E. Schröder y los representantes del álgebra lógica se mostraran descontentos. El silencio, o la vela-

60. I. KANT, *Kritik der reinen Vernunft. Kant's Werke*, Vol. III, Berlin. G. Reimer, 1911, pp. 7-8.

61. I. M. BOCHENSKI, *O. Cit. in Nota 4*, pp. 297-308.

62. *Grundg.*, Vol. I, Vorwort, pp. XIV-XXVI.

da alusión de Frege en el Prefacio de *Begriffsschrift* a Boole, todo ello rayano en una falta de aprecio, es irritante. Pero la verdad era, como apuntaremos más abajo, que ese lenguaje no le servía para el programa reduccionista.

Sólo destaco este detalle. En la introducción a su obra Boole había escrito: «nosotros no debemos asociar por más tiempo la Lógica con la Metafísica sino con la Matemática»⁶³. El álgebra lógica, en efecto, se presentaba como un cálculo matemático más con interpretación lógica. Ahora bien, Frege trataba de fundamentar la misma Matemática. Por eso quería una completa autonomía para la Lógica.

7. *Primer fruto del programa: la Begriffsschrift*. El desarrollo del programa reduccionista, apenas accesible a los matemáticos, filósofos y lógicos del contorno 1875, llena toda la vida de Frege. No estoy de acuerdo con los que rompen su actividad científica en cuatro o cinco etapas distintas. Todo hace unidad en él. Cada pieza vino a incorporarse en el engranaje en su momento preciso, cuando realmente se necesitaba. El programa le condujo a reformar la lógica anterior y a crear prácticamente la moderna. Le exigió también echar a andar una nueva metodología de las ciencias deductivas. Tuvo que incorporar a la tarea, asimismo, una nueva filosofía del lenguaje. Pero la urgencia más inmediata del mismo se manifiesta en la construcción de una nueva lengua, la *Begriffsschrift*.

La *logificación de la Aritmética* tiene un cariz deliciosamente epistemológico, como hemos descubierto más arriba. Vamos a ver, decía Frege, si partiendo de conceptos y proposiciones netamente lógicas, después de las oportunas cadenas deductivas, logramos derivar las leyes del número, dando a conocer en pureza el estatuto de los entes aritméticos. Para eso hay que mantener las citadas cadenas deductivas *libres de lagunas*, evitando cuidadosamente los defectos comunes del modo de proceder de matemáticos y lógicos al respecto. Hay que estar también sumamente atento a no dejarse colar por inadvertencia *elementos intuitivos*, cosa fácil siguiendo el modo usual de tratar conceptos por matemáticos, filósofos y lógicos.

Frege confiesa que intentó llevar adelante las exigencias del programa echando mano del lenguaje ordinario (Sprache), pero éste resultó ser un obstáculo imposible de vencer. No era capaz de alcanzar

63. G. BOOLE, *The Mathematical Analysis of Logic*, Cambridge, Macmillan & Barclan, 1847, p. 13. Usamos el texto divulgado por B. Blackwell, Oxford, 1965.

precisión en *conceptos y demostraciones*, no podía expresar la *creciente complejidad de las relaciones* que intervienen en el programa. «Aus diesen Bedürfnisse ging der Gedanke der vorliegenden *Begriffsschrift* hervor»⁶⁴.

Esta expresa declaración de Frege, hecha como un juramento en el mismo umbral de la *Begriffsschrift*, está en perfecta consonancia con otros lugares; es una convicción que mantuvo a lo largo de la vida. En *Grundlagen* asegura que el programa permanecerá en el mundo de lo probable, mientras no se resuelvan las dificultades señaladas, es decir, las lagunas en las demostraciones, la ingerencia de elementos intuitivos y la densidad del discurso. Para superar todo esto ha ideado la nueva lengua⁶⁵. En *Grundgesetze* cree que no basta haber expresado con rigor los conceptos para cumplir todas las exigencias de la prueba; es necesaria su *Begriffsschrift*⁶⁶.

III. CARACTERES GENERALES DE LA OBRA

El tema se presta a enfoques desde diversos puntos de mira; podríamos incluso complicarlo en demasía. Por eso nos ha parecido mejor adoptar una postura sencilla. Resultará, ante todo, muy aleccionador escuchar directamente a Frege y extraer un grupo de *condiciones y relaciones* que identifican bastante bien su obra. Las condiciones están muy ligadas al *título de la misma*, a la vez que resaltan bien la calidad de la nueva lengua. Su peculiar idiosincrasia se enriquece estableciendo comparaciones con el *lenguaje natural*, el *aritmético* y las *notaciones simbólicas* más relevantes. Es conveniente referirse también a sus *posibles aplicaciones*. Un breve *esquema del desarrollo interno* completará el cuadro.

A. *La nueva lengua y otros lenguajes.* *Aplicaciones posibles*

1. *Contenido del título.* El título, tal como aparece en la primera página de este trabajo, expresa un rico contenido en tres direcciones. La nueva lengua es *Begriffsschrift*, tiene que habérselas con el *pensamiento puro*, y está construida a imagen de la *notación aritmética*. Este

64. *Begr.*, Vorwort, p. X.

65. *Grundl.*, 90-91, pp. 102-104.

66. *Grundg.*, Vol. I, Einleitung, p. 3.

último rasgo lo estudiaré después de ver su relación al lenguaje ordinario, de acuerdo con el plan establecido.

No trataré de sondear la originalidad del nombre 'Begriffsschrift', en particular por lo que respecta a A. Trendelenburg (1802-1872), a quien Frege cita en el Prefacio del libro⁶⁷. Más difícil se presenta la traducción al castellano, pues todas las que conozco tienen inconvenientes. Las más usuales son *Conceptografía*, *Escritura Conceptual*, *Ideografía*. Esta última apunta expresamente a ideas, que se corresponden mejor con el vocablo alemán 'Vorstellungen', contrapuesto expresamente por Frege a 'Begriffe' y 'Gedanken'. El primero tendría un significado psicológico, subjetivo, mientras los otros dos lógico, objetivo⁶⁸. 'Conceptografía' y 'Escritura Conceptual' designan directamente conceptos. Pero si entendemos estos al modo aristotélico empobrecemos, como vamos a ver, la intención de Frege. Este peligro también es inherente a la palabra 'Begriff', por lo que el filósofo germano no estaba al final muy de acuerdo con llamar *Begriffsschrift* a la nueva lengua⁶⁹.

Frege se pregunta directamente por las condiciones que debe poseer un lenguaje para constituirse en *Begriffsschrift*. La característica fundamental es que sus signos expresan *exclusivamente contenidos conceptuales*. Hay que entender bien esto y tenerlo constantemente presente, dice Frege, si se quiere comprender de lleno mi formulario. En lo que atañe al contenido conceptual es exhaustiva, nada deja al «espíritu de adivinación». Pero arroja fuera todo lo demás, acaso lo más acariciado y querido en otros lenguajes. Los innumerables matices sintácticos o retóricos que en nada varían el contenido conceptual quedan excluidos. No digamos la incomparable riqueza semántica de interés puramente emocional, o las inagotables situaciones pragmáticas que tejen infinitas relaciones entre lenguaje, emisor y receptor.

El contenido conceptual se compone de *proposiciones*, *estructura* de las mismas, *relaciones lógicas* entre ellas y *reglas* para su manejo. Todo debe expresarse con signos *unívocos*, en el *menor número* posible y *fáciles* de manipular. *Begriffsschrift* está particularmente orientada a construir bien la *deducción correcta*⁷⁰. Los conceptos en sentido aristotélico sólo le pertenecen en cuanto forman parte de las proposiciones.

67. Cf. J. V. HEIJENOORT, *Op. Cit. in Nota 6*, p. 1 (nota b) y p. 6.

68. *Ibid.*, p. 11 (nota 6).

69. *Ibid.*, p. 1 (nota b).

70. *Begr.*, Vorwort, p. X; 3, pp. 2-4. Angelelli, *Ueber die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift*, pp. 112-113.

La nueva lengua, siempre ateniéndonos al título de la obra, es un *formulario del pensamiento puro* (Formelsprache des reinen Denkens). La expresión tiene claras resonancias kantianas e invita a hurgar en esa dirección, pero vamos a resistir la tentación. Con pensamiento puro' Frege se refiere simplemente a un tipo de contenido conceptual. La nueva lengua ha de expresar tan sólo *contenidos conceptuales lógicos*, lo cual está en perfecta armonía con el programa reduccionista. Pero aquí nos vemos sumergidos en una dificultad mayor. ¿Qué alcance tiene el mundo lógico freguiano, el área del pensamiento puro?

Contiene exclusivamente relaciones, las cuales se muestran independientes de la naturaleza particular de las cosas, son verdaderamente universales. Los sujetos de ellas, las proposiciones o funciones, apuntan sin más a lo verdadero o falso sin más cualificaciones. No deben expresar nada de la intuición empírica, como las proposiciones físicas u otras; ni de los objetos de la intuición pura, como las geométricas. En el plano del pensamiento puro se encuentra, por ejemplo, la implicación entre proposiciones cualesquiera, el número como propiedad de los conceptos. El mundo lógico freguiano aparece como un trascendental, no de corte kantiano, sino tomista; un trascendental de segundo orden, pues afecta a contenidos conceptuales cualesquiera más que a objetos⁷¹. Téngase presente la distinción ontológica freguiana entre objeto y concepto.

2. *Frente al lenguaje ordinario y el aritmético.* Tenemos pues caracterizada la obra como *Begriffsschrift des reinen Denkens*. Aunque todo está ya dicho sustancialmente al respecto, podemos matizar algo más entrando en comparaciones con otros lenguajes. Establezcamos, en primer lugar, un careo con el *lenguaje ordinario* (Sprache). Este no es *Begriffsschrift* porque no expresa exclusivamente contenidos conceptuales. Hay en él infinitas frases directivas de la conducta, valoraciones, interrogaciones, efusiones de sentimientos, etc. Pero aún limitándonos al contenido conceptual no llega a constituirse en *Begriffsschrift*.

Los signos que intervienen en sus enunciados no son muchas veces *unívocos*. No se refleja claramente la *estructura de las proposiciones*,

71. *Begr.*, Vorwort, p. X; 23, p. 55. *Grundl.*, 14, pp. 20-21; 24, pp. 30-32. Alguien puede creer que hubiese hecho mejor la comparación con las *secundae intentiones* de los escolásticos, pero se equivoca. Pues para Frege lo real, en sentido fuerte, abarca objetos y conceptos (funciones). Lo lógico es un tipo de real que está en conexión con los conceptos, como la unidad o la bondad, en sentido tomista, lo está con los objetos. Por eso le llamo trascendental de segundo orden.

así como las *relaciones lógicas* entre ellas y las *reglas* de su manejo. Es poco apto para jugar con *relaciones densas*, y silencia muchas veces presupuestos para una *deducción correcta*. Se acerca menos aún a una *Begriffsschrift des reinen Denkens*, pues sus proposiciones tienen un marcado acento semántico restrictivo. Ellas hablan de campos, de flores o de amores, de movimiento o calor, de distancias, espacios y figuras, etc. El lenguaje ordinario es inmensamente más rico que cualquier *Begriffsschrift*. Pero no por eso hay que despreciar ésta. También el microscopio es inferior al ojo humano, pero aquél supera en mucho a éste para la investigación biológica. Lo mismo pasa con la nueva lengua. Es muy superior al lenguaje ordinario por lo que respecta al trabajo de deducción, para comunicar relaciones lógicas. El que no sirva para otros asuntos no implica inutilidad para todo uso ⁷².

Tampoco el *lenguaje aritmético* es *Begriffsschrift* en sentido pleno. Frege le reconoce esta categoría en lo que atañe a la expresión de *contenidos proposicionales*, principalmente igualdades y desigualdades. Si se compara en esto con el lenguaje ordinario, sólo puede uno admirar la pureza conceptual alcanzada. Pero en otros aspectos deja que de-sear. No vamos a repetir aquí las lagunas generales relativas a *definición* y *demonstración* recogidas más arriba. Ahora interesa destacar que este lenguaje no tiene signos especiales para expresar las *relaciones lógicas* entre sus proposiciones, ni hay en él una codificación de *reglas de deducción*. Si refleja tan sólo pensamientos puros habrá que demostrarlo. Esa es precisamente la tarea del programa reduccionista.

No obstante Frege afirma en el mismo título de la obra, que su *Begriffsschrift* tiene parecido con el lenguaje aritmético. La afirmación es demasiado fuerte. A la hora de matizar más nos quedamos en que se asimilan en el *empleo de las letras*. Pero es un formidable rasgo, ya que no hay modo de colocarse cómodamente en la pura *generalidad* sin el uso de letras. Las relaciones lógicas y reglas recaerán sobre *a, b...*, *f(x), F(y), f(x, y)*, etc., que denotan respectivamente cualquier proposición, función, propiedad, aplicación, etc., permaneciendo en el área del *pensamiento puro* ⁷³.

3. *Notaciones parcialmente leibnizianas. Proyecto de Leibniz*. No pueden contarse como *Begriffsschrift*, por otra parte, los lenguajes *parcialmente leibnizianos* de la nueva ola, como las *notaciones de G. Boole, R. Grassmann (1844), S. Jevons (1864) y E. Schröder*. Fue este último

72. Angelelli, *Op. Cit. in Nota 70*, pp. 108-112. *Begr.*, Vorwort, p. XI.

73. Angelelli, *Op. Cit. in Nota 70*, p. 112. *Begr.*, Vorwort, p. X; 1, p. 1.

quien echó en cara a Frege de no emplear el lenguaje booleano para sus investigaciones, creando uno nuevo sin necesidad y encima más imperfecto. El lógico de Wismar, en su réplica, demuestra más bien lo contrario. Nos atenemos a los rasgos más salientes de la crítica.

Desde una *perspectiva general* Frege apunta cuatro observaciones. La notación booleana, en treinta años de existencia, no ha alcanzado éxitos tan espectaculares como para no poder dudar siquiera de sus bases, estando condenados simplemente a luchar por su ulterior desarrollo. Mis intenciones y las de Boole, por otra parte, son distintas. Su objetivo era crear una lógica abstracta, un *calculus ratiocinator*; el mío, en cambio, es expresar un contenido de un modo preciso y perspicuo, una auténtica *lingua characterica* (sic). Si la notación aritmética no era *Begriffsschrift* porque le faltaba la expresión de la lógica, ésta no lo es porque le falta el contenido.

Boole, en tercer lugar, usa símbolos aritméticos para designar estructuras lógicas. Esto no me es lícito, comenta Frege, porque yo quiero expresar toda la Aritmética en términos lógicos. Subrayemos, por último, que Boole, lo mismo que el viejo Aristóteles, parten de conceptos para construir su respectiva lógica; yo parto, dice, de proposiciones. Una descripción de los conceptos a modo de suma de notas (Merkmale) —more Aristóteles, escolásticos, Leibniz y algebristas—, nada tiene que ver conmigo ⁷⁴.

Si pasamos a *analizar en detalle* la lógica abstracta booleana, encontramos en ella manifiestas deficiencias. Su clasificación de las proposiciones en primarias y secundarias (categóricas-hipotéticas *à peu près*) no es completa ⁷⁵. Las existenciales forman subconjunto aparte. Boole no tiene signo alguno para expresar la generalidad, el rasgo más importante y fecundo de la escritura freguiana. La lógica de las proposiciones primarias deja mucho que desear. Las letras designan conceptos, o mejor extensiones de conceptos, pero no encontramos un signo para referirnos al individuo. No se hace distinción alguna entre la subordinación de conceptos y la pertenencia de un objeto a un concepto. Se encuentran diversos signos para la negación en distintos expositores del álgebra lógica, algo no digno de un lenguaje perfecto. Las notaciones

74. *Ibid.*, p. 112. *Id.*, *Ueber den Zweck der Begriffsschrift*, pp. 97-98 y 100. *Begr.*, Vorwort, p. X.

75. La clasificación no se encuentra en *The Mathematical Analysis of Logic*, sino en G. BOOLE, *An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theory of Logic and Probabilities*, London, 1854, c. IV, Prop. I.

tomadas de la Aritmética, como $+$, \times , 1 , 0 , resultan ambiguas; pues las proposiciones $x+x=x$ (desde Jevons) y $x^n=x$ son válidas en álgebra lógica pero no en Aritmética. El trato de las proposiciones secundarias, por otra parte, está sometido al tiempo. Boole, además, interpreta la relación o en sentido exclusivo fuerte.

Así pues, Frege tenía plena razón para rechazar el álgebra booleana, ya que ni servía a sus objetivos primordiales ni comprendía relaciones lógicas capitales ⁷⁶.

Hemos tildado a las álgebras booleanas de lenguajes parcialmente leibnizianos. De otro modo no tendría sentido el hecho de que Frege declare su *Begriffsschrift* en la línea de Leibniz, al mismo tiempo que rechaza la notación de aquéllas. Leibniz tuvo a este respecto dos ideas geniales.

Aleccionado por Aristóteles sobre el imperio de la forma en todo razonamiento correcto, empapado a la vez del arte general de R. Lulio (h. 1235-1316) y de los procesos específicos del Algebra, se dio cuenta de la posibilidad de una *mathesis universalis*. La precisión y movilidad del cálculo algebraico no se debía a su objeto (la cantidad, como se decía entonces), sino al manejo de unos «caracteres» según reglas establecidas. «Nihil aliud enim est calculus quam operatio per characteres...» ⁷⁷. Variando, pues, signos y reglas, «infiniti modi calculandi excogitari possunt» ⁷⁸. El álgebra de Boole es uno más. Pero el dominio perfecto de un lenguaje es la mitad de la historia. Lo importante es comunicar algo, un contenido. Leibniz no estaba cortado para empresas pequeñas. Pensó nada menos que en una *characteristica universalis*, un lenguaje simbólico que recogiera los elementos primitivos de todo el saber, construyéndose lo demás por preceptos fijos, a modo de *calculus ratiocinator*. Ideó, en suma, una *Allgemeine Begriffsschrift*.

Intentó llevarla a efecto, ensayó seis o siete sistemas, pero no tuvo la constancia necesaria para desarrollar uno, ni la valentía de romper con la forma de las proposiciones aristotélicas ⁷⁹. El entusiasmo, dice Frege, le ocultó las dificultades del proyecto. Pero si un problema aparece inaccesible en toda su generalidad, prosigue, hay que plantearlo bien y acometer su solución paso a paso. El lenguaje aritmético, el

76. Angelelli, *Ueber den Zweck der Begriffsschrift*, p. 98 ss.

77. G. W. LEIBNIZ, *Mathematische Schriften*, Hrsg. C. I. Gerhardt, Berlin-Halle, 1849-1863, Vol. IV, p. 462.

78. G. W. LEIBNIZ, *Opusculs et fragments inédits de Leibniz*, Ed. L. Couturat, Paris, 1903, p. 556.

79. Cf. L. COUTURAT, *La Logique de Leibniz d'après des documents inédits*, Paris, 1901. Texto reproducido por G. Olms, Hildesheim, 1961.

geométrico y el químico son realizaciones parciales del proyecto leibniziano para dominios particulares. «Mi *Begriffsschrift* añade a esos campos uno nuevo...». Pero ocupa un puesto central ya que contiene conexiones universales, lógicas; relaciones que atañen a todo contenido conceptual. Por eso llenará lagunas en los formularios ya existentes, unificará dominios, extenderá sus tentáculos a otras áreas⁸⁰.

4. *Aplicaciones posibles*. Frege ahora se deja dominar por el mismo entusiasmo que acaba de sorprender en Leibniz. Augura a su *Begriffsschrift* una era feliz de aplicaciones. Resultará excelente a la hora de establecer las bases del *cálculo diferencial e integral*. Sólo con añadir algunos signos más para las relaciones intuitivas, quedaría convertida en un *cálculo geométrico*, obteniéndose una suerte de «analysis situs». Desde aquí se procedería a la *teoría general del movimiento*, para pasar después a la *mecánica* y a *toda la física*. También llegará el benéfico influjo a la *filosofía*, pues una de sus tareas más espectaculares «es quebrar el dominio de la palabra sobre el espíritu humano». Frege está convencido de que el pensamiento no podrá jamás expresarse con toda nitidez; siempre habrá algo opaco en el lenguaje, siempre algo inefable en el espíritu. Pero se pueden evitar los fallos elementales⁸¹, como la no confusión de los números con las cifras.

El lector se sentirá casi tentado a ponderar este vaticinio de Frege a la vista de grandes sectores de la Filosofía y de la Ciencia actuales. Pero no es el momento de comprobar profecías. El mismo perdió pronto el entusiasmo inicial. Hasta debió ocuparse de aplicaciones elementales, casi ridículas, con el ánimo de conducir a sus contemporáneos como niños al meollo de la nueva lengua⁸².

B. *Esquema de desarrollo interno*

1. *Distribución general*. Aparte del Prefacio —comentado ya profusamente en etapas anteriores— y del Índice de Materias, la obra comprende *tres apartados* y un *organigrama de leyes*. El primero se refiere a la *explicación de la nueva lengua*. Introduce los signos, precisa su significado y se establecen los principios y reglas de su uso. La presentación no tiene cariz sintáctico puro, ni semántico, sino sintáctico-semántico, en perfecto acuerdo con el espíritu freguiano. Dedicar las otras dos secciones a expresar y derivar en la nueva lengua proposi-

80. *Begr.*, Vorwort, pp. XI-XII.

81. *Ibid.*, pp. XII-XIII.

82. Cf. *Angelelli, Anwendungen der Begriffsschrift*, pp. 89-93.

ciones del pensamiento puro. Pero hay gran diferencia entre ambas. La segunda contiene *leyes del pensamiento puro* de carácter abiertamente lógico; nadie rehusaría incluirlas en la Lógica. Esto interesa mucho a Frege por razón del programa reduccionista. La tercera, en cambio, exhibe *elementos de una teoría general de sucesiones*. Parece que asistimos aquí a un salto mortal del campo lógico a otros dominios. Pero ahora surgen claras las ventajas de una *Begriffsschrift*.

La nueva lengua, como ya sabemos, nada contiene tocante a objetos de carácter particular, nada intuitivo, ya se trate de la intuición empírica o pura a priori. De otro modo estaría contaminada la misma Lógica. Ahora bien, esta teoría de sucesiones está expresada únicamente con elementos de esa lengua. Luego no hemos huido del ámbito del pensamiento puro; estamos aún en pleno dominio lógico, en la más prístina generalidad. Alquien se admirará de que la proposición 133, la última de la obra, posea este cariz; lo mismo que un niño se sorprende al ver transformado el aire en un líquido visible cuajado de gotas. Aparte de manifestar la posibilidad de reducir entes matemáticos a lógicos con la nueva lengua, Frege ha querido también llamar la atención sobre su potencia para expresar proposiciones relacionales complejas⁸³.

Antes de pasar a esquematizar cada una de las partes es preciso subrayar una aguda observación de Frege relativa a todo el sistema. Distingue netamente, dicho en terminología actual, el *lenguaje del metalenguaje*, reconociendo leyes expresadas en el lenguaje y leyes descritas en el metalenguaje. La primera parte corresponde al metalenguaje; las otras dos al lenguaje⁸⁴.

2. *Bosquejo de la nueva lengua*. Una lengua dejada en pureza lógica, es decir, despojada de contenidos particulares y de expresiones referentes a asuntos psicológicos, metafísicos, retóricos, antropológicos, pedagógicos, etc., se presenta como una serie de proposiciones (juicios, dice Frege) derivadas unas de otras según reglas establecidas de deducción. Las proposiciones se resuelven a su vez en letras y en signos especiales. Luego los elementos primitivos de *Begriffsschrift* son *letras*, *signos especiales* y *reglas*, de las cuales las de deducción se aplican con un *método particular*. Tratemos de identificar cada uno de estos aspectos.

83. *Begr.*, 23, p. 55.

84. *Ibid.*, 13, p. 25.

El lógico de Wismar utiliza en su lengua *tres tipos de letras*: latinas y góticas, tanto minúsculas como mayúsculas, y minúsculas griegas. Estas últimas entran en acción en el párrafo 24. Forman parte únicamente del definiendum de una frase definidora. Su misión específica es indicar la composición del definiens sin ambigüedad alguna. Las góticas y latinas tienen que ver con la expresión de proposiciones universales y existenciales. El papel fundamental de toda letra es dotar de generalidad al lenguaje. Con *a*, *b*, *c* apunto a cualquier contenido judicable o nombre; con *f(x)*, *y* a cualquier relación o aplicación. El filósofo germano se abstiene de llamarlas variables, por no poder precisar el significado de esta expresión⁸⁵. Hasta ahora sólo nos hemos referido a las *letras lingüísticas*. Pero se usan también las mayúsculas griegas como *letras metalingüísticas*. Ya se comprende que intervienen solamente en la explicación de la lengua, siendo puramente abreviaturas (Abkürzungen) de fórmulas de *Begriffsschrift*. Así $\Phi(\Delta)$ se refiere a expresiones funcionales del tipo $F(x)$, $f(b)$, etc.⁸⁶. Frege manifestó una vez que puede prescindirse de la distinción de letras latinas y góticas, acaso también de las griegas, pero todo ello al precio de perder claridad en la composición de la lengua⁸⁷.

Los *signos especiales* primitivos de *Begriffsschrift* son los siguientes:

|—, ⊥, ⊥, ≡, —^a—

Expresan cinco conceptos fundamentales de la lógica freguiana que indicaremos sin exponer. |— Γ dice que la proposición Γ es *verdadera*; ⊥ Γ refiere la relación de *implicación* entre Γ y Δ ; ⊥ Γ la *negación* de Γ ; —($\Gamma \equiv \Delta$) la *identidad* de los contenidos Γ , Δ ; —^a— $\Phi(a)$ la *generalización* universal de $\Phi(\Delta)$. A estos conceptos hay que añadir el de *función*, que Frege expresa del modo habitual $\Phi(\Gamma)$, $\Phi(\Gamma, \Delta)$; v. gr. $f(a)$, $f(a, b)$. Así pues, hay *seis ideas primitivas* en esta lógica. El filósofo alemán no introduce directamente *signos de agrupación*. Utiliza sin más los paréntesis en la escritura de funciones y para la identidad de contenido⁸⁸.

85. *Ibid.*, 1, p. 1; 11, pp. 19-21; 24, pp. 56-57; 26, p. 61. V. HEIJENOORT, *Op. Cit. in Nota 6*, p. 10 (nota 4).

86. *Begr.*, 2, p. 2, *).

87. J. V. HEIJENOORT, *Op. Cit. in Nota 6*, p. 26 (nota 14).

88. *Begr.*, 2, p. 2; 5, p. 5; 7, p. 10; 8, p. 15; 11, p. 19; 10, p. 18.

Esta sencilla lengua se muestra muy capaz de manifestar con rigor otros conceptos lógicos, que en este sistema no tienen ya razón de primitivos. Con los signos de implicación y negación pueden expresarse las conectivas disyunción inclusiva, disyunción exclusiva simple y mutua, conjunción, adversativa y la ni-ni. Frege sugiere incluso que tenía opción a introducir como primitivas la conjunción y la negación. «He elegido la otra alternativa porque me resulta más sencilla para la práctica de la deducción»⁸⁹. Con los signos de generalización universal y negación se escriben sin dificultad las *proposiciones existenciales*; si añadimos además el signo de implicación, las *universales* y *particulares*⁹⁰. Con la notación para la identidad y un doble trazo de juicio, o sea con fórmulas del tipo $\Vdash(\Gamma \equiv \Delta)$ se introducen todas las *expresiones definidas*⁹¹. Según la costumbre freguiana Γ representa el definiens y Δ el definiendum.

El sistema de *reglas de Begriffsschrift* es más bien complejo. Hace uso de *reglas de formación* sin haberlas explicitado previamente, salvo por lo que respecta al dominio de letras góticas y latinas (11, p. 20 y 21). Aparecen un tipo de *reglas «fundacionales»*, expresión de la naturaleza de conceptos primitivos, que parecen tener la misión de avalar axiomas. Así la de identidad (8, p. 15) y la de especificación universal (11, p. 19), para los axiomas 52 (20, p. 50) y 58 (22, p. 51) respectivamente. Utiliza al menos *tres tipos de reglas de derivación*. Desde el concepto primitivo de implicación, introduce con rigor y se prueba ser correcta de un modo magnífico la regla de separación. Frege dirá que es la única norma de derivación de su sistema. Se ha hecho mucho hincapié en esto, pero se olvida la restricción que él mismo puso: «... al menos en los casos en que se deduce un *nuevo juicio de más de uno sólo*»⁹².

Hay, en segundo lugar, reglas de sustitución para letras góticas (11, p. 21), latinas (*ibid.*) y minúsculas griegas (24, p. 56-57; 26, p. 61). El reemplazo de letras latinas reviste gran variedad y a veces no poca complicación. La mayoría de estos usos no está determinado previamente⁹³. Hay, por último, dos reglas de generalización de letras latinas

89. *Ibid.*, 7, pp. 10-13.

90. *Ibid.*, 12, pp. 22-24.

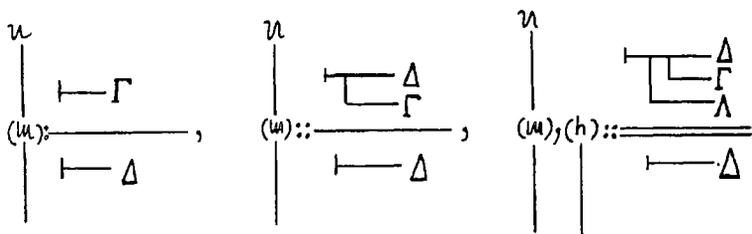
91. *Begr.*, 24, pp. 55-56.

92. *Ibid.*, 6, pp. 7-10.

93. Véase, por ejemplo, la deducción de las proposiciones 3, 53, 55, 59, 60, 68, 77, 89, 132. La amplitud de sustitución permitida a las letras funcionales se mostró altamente destructora al anunciar Russell a Frege su paradoja en 1902.

(11, p. 21-22), cuyo empleo un tanto peculiar puede advertirse en la deducción de las proposiciones 81, 91 y 123.

El *método de derivación* comprende los siguientes rasgos. Cada proposición va numerada con un *entero positivo*, a fin de referirse a ella del modo más cómodo posible. El uso de la *regla de sustitución* se indica con el trazo vertical $|$ puesto inmediatamente debajo del número de la proposición a quien se aplica. Los *signos a reemplazar* se colocan a la izquierda del trazo anterior; *los que los reemplazan* a la derecha. La *regla de separación* se utiliza de dos maneras. La primera se simboliza con $:\text{-----}$, la segunda con $::\text{-----}$. La doble aplicación de la segunda modalidad con $::\text{=====}$. Contamos así con tres figuras generales de derivación:



En la primera figura m es de la forma $\frac{\psi}{\phi} \vdash \Gamma$; en la segunda, $\vdash \Gamma$; en la tercera, m será $\vdash \Lambda$ y $h \vdash \Gamma$. La *rotura de la cadena deductiva* se señala con el trazo ----- subrayado⁹⁴. Se entiende bien que este método evita perfectamente las lagunas en las demostraciones, uno de los defectos de los matemáticos de la época ya comentado más arriba.

3. *Leyes del pensamiento puro*. En la segunda parte de la obra, como ya se advirtió, Frege expone un conjunto de proposiciones escritas en la nueva lengua de corte netamente lógico. Son en total 68, pero apunta que su número es indefinido. Si queremos considerar aisladamente un número indefinido —tal vez infinito— de proposiciones intentamos algo imposible. Pero si las imaginamos formando estructura, ordenadas según la relación de implicación, podemos llegar a destacar un *núcleo primitivo* de donde se deriven las demás. Frege no llama axiomas a estas proposiciones primeras. ¿Qué criterio seguir pa-

94. *Begr.*, 6, pp. 7-9.

ra hallar el citado núcleo? El principio de orden es proceder desde las *más simples a las más complejas*. Las más simples son las que sólo incluyen letras y el símbolo de implicación; las siguientes añaden la negación; vienen después las que exhiben también el signo de igualdad de contenido; las más complejas, por último, comprenden hasta el símbolo de generalidad⁹⁵. Consulte el lector los signos especiales primitivos del sistema.

Según el principio de simplicidad establecido, la lógica freguiana se presenta *estratificada en cuatro niveles*. Aparecen, en primer lugar, 27 leyes relativas a la implicación (14-16, p. 26-43); 24 correspondientes a la lógica de la negación (17-19, p. 43-50); 6 a la identidad (20-21, p. 50-51); y 11 a la teoría de la cuantificación (22, p. 51-54). Esta teoría es de orden superior, ya que permite cuantificar letras funcionales. Aunque la primera fórmula de orden superior aparece en la teoría de sucesiones, la 76 en concreto, téngase en cuenta que la 68 contiene tales cuantificaciones.

El *núcleo primitivo* está integrado por *nueve proposiciones*. Tres pertenecen a la lógica de la implicación; tres a la negación; dos a la identidad; y una a la cuantificación. Frege no introduce las siguientes sin dar alguna señal de la potencia derivativa de las anteriores. Aunque no lo demuestra, insinúa que el núcleo primitivo es *completo e independiente*. Cree, asimismo, que no es único. Caben *nuevos núcleos* completos e independientes (13, p. 25-26). El mismo halló otro, al observar que las proposiciones primitivas 31 y 41 pueden sustituirse por otra con igual potencia demostrativa⁹⁶. ¿Cómo se justifican estas proposiciones primitivas? Apelando a la metalógica, a las nociones primitivas establecidas, particularmente a la naturaleza bivalente de la lógica freguiana⁹⁷.

4. *Teoría general de sucesiones*. En la tercera parte de la obra el lector contempla 65 fórmulas dedicadas a las sucesiones. Es una pequeña realización del programa reduccionista. Por eso no le es lícito a Frege introducir noción alguna nueva, algún símbolo que añada contenido a los ya establecidos al explicar el mecanismo y riqueza semántica de la lengua. Esto supone la garantía más completa de que no nos

95. *Ibid.*, 13, pp. 25-26.

96. *Ibid.*, Vorwort, p. VIII.

97. Cf. *Begr.*, 14, pp. 26-28; 16, p. 35; 17, p. 43; 18, p. 44; 19, p. 47; 20-21, p. 50; 22, p. 51. La justificación no tiene nada que ver, por ejemplo, con la superficial declaración de A. N. WHITEHEAD & B. RUSSELL, *Principia Mathematica*, Vol. I, Cambridge, University Press, 1960², p. 12.

salimos del área de la Lógica. Tampoco añade principios nuevos que vengan a engrosar el núcleo primitivo de proposiciones; todo sigue fundamentado en las nueve leyes lógicas citadas más arriba. Se permite, en cambio, introducir nuevos signos a modo de *definiciones*, es decir, abreviaturas de fórmulas un tanto complejas de *Begriffsschrift*. Lo hace simplemente para facilitar las derivaciones. La sección entera está organizada en torno a *cuatro definiciones* con sus respectivas *consecuencias*.

El filósofo germano supone un procedimiento f originador de un conjunto de entes al que denomina *sucesión-f*. Así, por ejemplo, un conjunto de vivientes aparecidos por generación. En la nueva lengua tal procedimiento se expresa simplemente con $f(x, y)$, alcanzando plena generalidad. La *primera definición* expresa que la *propiedad F es hereditaria en la sucesión-f*, y deriva seis proposiciones referentes a ella (24-25, p. 55-60). La *segunda definición* establece el sentido preciso de *y sigue a x en la sucesión-f*, o *x precede a y en la sucesión-f*. Es de notar que aquí aparece por primera vez la cuantificación de letras funcionales, para caracterizar la relación de ser siguiente por el conjunto de propiedades hereditarias que se transmiten de x a y en la *sucesión-f*. Se extraen 22 consecuencias (26-28, p. 60-71).

La *tercera definición* fija el significado de *z pertenece a la sucesión-f que comienza por x*, o *x pertenece a la sucesión-f que acaba con z*. Se derivan 15 nuevas proposiciones (29-30, p. 71-77). La *cuarta definición*, por último, determina la *univocidad del procedimiento f*, demostrando 18 proposiciones (31, p. 77-87).

5. *Organigrama de leyes*. La *Begriffsschrift* contiene 133 proposiciones, que Frege ordena en una tabla con las siguientes características. Aparecen ahí los *lugares* en los que se ha hecho uso de una proposición para derivar otra. Se exhiben, asimismo, los *modos* diversos de aplicación de una fórmula. Es fácil observar, por último, la *frecuencia* de uso de una fórmula. Todo ello hace que se puedan rastrear perfectamente los principios inmediatos o mediatos de cualquier proposición derivada (p. 87-88).

IV. ASPECTOS CREATIVOS DE LA OBRA

1. *Criterio de selección.* Hacía más de veintidós siglos que existía la Lógica, cuando Frege se decide a escribir el Prólogo de *Begriffsschrift* en diciembre de 1878. Docenas de lógicos eminentes, desde Teofrasto a Augusto de Morgan, de Crisipo a Pedro Hispano, de Raimundo Lulio a Boole, habían conservado, recuperado, ampliado o hecho pedazos a veces la imponente tradición legada por las corrientes aristotélica y megárico-estoica. Esto sin mencionar otros tipos de hacer Lógica, como las ricas formas desarrolladas por pensadores indios.

Es manifiesto que el filósofo de Wismar no se encuentra en la misma tesitura que Aristóteles (384-322 a. C.) o Filón de Megara (s. IV-III a. C.). Aquél conocía al menos la decadente lógica «clásica», éstos debían enfrentarse con un mundo nuevo. Tal vez no se tiene muy en cuenta este hecho fundamental a la hora de emitir valoraciones como las que encabezan este trabajo. La situación vendría a complicarse más, si Frege fuese un buen conocedor de la Historia al estilo de Ch. S. Peirce (1839-1914). Sus obras, incluso *Begriffsschrift*, revelan más bien una falta de cultura histórica en el dominio lógico. Sólo apunto este detalle. Al establecer la relación de identidad distingue muy bien entre el uso y la mención de los signos, algo habitual en docenas de manuales de lógica escolástica bajo la denominación de *suppositio formalis* y *materialis*. Frege no parece conocer esta doctrina⁹⁸.

Siempre constituirá un reto para el historiador seleccionar con acierto lo genuinamente nuevo dentro de una corriente secular de pensamiento. Aparte de sus limitaciones personales frente a un país sin fronteras, se interponen continuamente actitudes hermenéuticas. Lo que uno cree recién nacido, otro lo sitúa a siglos de distancia. No es difícil encontrar una prehistoria para cada suceso histórico. Por eso no resulta extraño que al intentar recopilar los aspectos creativos de *Begriffsschrift*, conforme al criterio de eminentes lógicos o historiadores de la disciplina, las listas de hallazgos se muestren demasiado dispares. Este hecho me ha sorprendido.

Con 'aspectos creativos' me refiero desde luego a lo *estrictamente nuevo*, pero incluyo también ciertos *valores redescubiertos*. Hay que subrayar, asimismo, que me atengo tan sólo a *Begriffsschrift*, no a toda la obra freguiana.

98. *Begr.*, 8, p. 13 s.

La potencia creadora del filósofo alemán se expande al menos en cinco direcciones tocantes al *acotamiento del dominio lógico* y al *estilo de construcción* de la disciplina; a la *unidad estructurada* que impone en la misma, a los *análisis particulares* que lleva a cabo y a *leyes especiales de relaciones*. Voy a indicar con un número romano los hallazgos más generales; con el número romano correspondiente y una letra latina minúscula los que caen dentro de los primeros.

2. *El dominio lógico visto en pureza*. Lo primero que hay que reconocer en el libro de Frege es la *invención de una nueva lengua (I)*. Esto me merece gran respeto, ya que considero la creación del lenguaje el más fantástico de los inventos de la comunidad humana. Debemos situar sin más al filósofo de Wismar en el grupo de hombres que han echado a andar notaciones de alguna importancia, desde los geómetras griegos o los matemáticos indios, la escritura musical o el morse, hasta los simbolismos de la Química o de las álgebras abstractas. Los historiadores de la Lógica se han ocupado de este o aquel detalle de la escritura freguiana, porque representan innovaciones de fondo, como la expresión de funciones pluriargumentales, pero pasan por alto el hecho crudo y mucho más interesante de haber dado a luz una lengua entera.

Estos lenguajes especializados suelen juzgarse teniendo en cuenta *condiciones sintácticas, potencia semántica y capacidad de comunicación*, pues no hay lugar a preguntarse por la sensibilidad estética o literaria, por sus aptitudes retóricas o la fuerza eficaz que impulsa o modifica la conducta humana. En atención a las condiciones sintácticas junto con la economía y comodidad de comunicación —incluida la de los impresores—, se tiende no pocas veces a catalogar los lenguajes en *naturales y antinaturales*. La notación freguiana está tachada de antinatural desde los días de E. Schröder⁹⁹. Los Kneale, por citar grandes admiradores de Frege, la califican de «engorrosa» (cumbrous)¹⁰⁰. No quiero tratar a fondo esta cuestión por falta de espacio. Tan sólo subrayo lo siguiente: la naturaleza, en estos casos, la crea el mismo lenguaje.

El hombre europeo, por ahora —no así el chino o el japonés—, tiene en este sentido una naturaleza unidimensional, porque su lenguaje ordinario es lineal. Como el lenguaje freguiano es bidimensional no es extraño que los europeos lo tachen de antinatural. Pero me atrevo a

99. Cf. Nota 8.

100. W. & M. KNEALE, *Op. Cit. in Nota 5*, p. 520.

augurar que, en muchos campos de la ciencia formal, lo antinatural será a no tardar lo lineal; pues lo bidimensional es mucho más apto para expresar relaciones densas. Nadie considera antinatural, por este motivo, el lenguaje bidimensional de la química orgánica. Veo mucho más ventajosa para la Lógica, por la misma razón, la escritura freguiana que la peano-russelliana con todas sus derivadas. Más, incluso, que la notación de Lukasiewicz, pues aunque elimina totalmente los paréntesis —no ocurre así completamente en Frege—, es muy inadecuada para expresar intuitivamente relaciones complejas.

Lo que acabamos de decir atañe en parte a la potencia semántica de la nueva lengua, pero quiero fijarme ahora en un aspecto particular. Hasta 1879 no se consigue expresar el *dominio lógico en pureza (II)*. Frege lo denominaba «pensamiento puro». Ya hemos visto anteriormente el sentido completo de la frase. Encuentro en la notación freguiana, respecto de lo anterior, como tres *grados de purificación*. La nueva lengua no permite formular cuestión alguna —lo que puede ser un fallo—, pero mucho menos problemas de Psicología, Ontología, Crítica e incluso Pedagogía, que habían infectado la Lógica gradualmente desde los primitivos comentaristas de Aristóteles hasta el diecinueve. En *Begriffsschrift* nada aparece de esto. Se trata del *primer grado de purificación*.

Alguien puede objetar que los *Analíticos Primeros*, las *Summulae* de los escolásticos amantes del rigor, muchos *fragmentos de Leibniz* y, sobre todo, las *notaciones booleanas* tampoco se ocupan de tales cuestiones. Desde luego, pero no alcanzan el *segundo grado de purificación*. Este recae sobre las constantes lógicas. No basta alcanzar la plena generalidad utilizando variables al estilo de Aristóteles, Leibniz y Boole. Hay que introducir símbolos especiales para las constantes declarando su propio sentido único al estilo de Frege. Un 'es' o un 'si... entonces...' son signos ambiguos; no es fácil hacer lógica con ellos sin sembrar equívocos. Recuérdese al respecto las discusiones sobre la implicación a través de la historia.

El *tercer grado de purificación* procede de liberar la Lógica de la matematización, vicio en que había caído Boole. Los numerales '1', '0', los signos de operación '+' y '×' con sus inversos relativos a resta y división se introdujeron en el lenguaje lógico, cuando ya tenían un sentido en Aritmética. Hubo que acudir a reinterpretaciones, resultando particularmente refractarios los tocantes a resta y división.

Así pues, Frege independizó de un golpe la Lógica de la tiranía del lenguaje ordinario, de otros lenguajes (ontológico, psicológico, crí-

tico, pedagógico, etc.) y de la notación aritmética. El precedente más afín en este sentido se me antoja José Diez Gergonne (1771-1859), si bien confinado a una pequeña parcela (relaciones entre clases) y sin vencer el segundo grado de contaminación respecto de las conectivas¹⁰¹.

3. *Construcción sin lagunas*. No basta haber intuido perspicazmente el dominio de lo lógico, hace falta explorarlo con alguna garantía. La exploración permite ciertas libertades en la elección de caminos. Frege escogió sin duda el suyo y lo recorrió de un modo ejemplar. Para ello se vio obligado a distinguir el *nivel lingüístico del metalingüístico (III)*, a adoptar la *axiomatización compacta (IV)*, y la *definición abreviatura (V)*. Consideremos cada uno de estos aspectos.

Algún historiador puede protestar por incluir la separación del *nivel lingüístico y metalingüístico* como un hallazgo de *Begriffsschrift*. Dirá que los megárico-estoicos nunca confundieron leyes y reglas, que se remontaron incluso al estrato de los metateoremas. Los escolásticos, añadirá, compusieron lo mejor de su lógica en metalenguaje; especularon mucho sobre el uso y mención de los signos. Todo ello supone la neta distinción de los dos niveles. Admitiendo plenamente la protesta, podría responder que se trata de un redescubrimiento. Pero hay en juego mucho más. En toda la historia de la Lógica anterior a Frege no se encuentra la construcción de una lengua lógica entera basada en esa distinción. Al hablar más arriba de la *distribución general* de la obra, hemos visto al filósofo germano organizar su trabajo conforme a la citada separación de niveles.

La distinción de *lenguaje y metalenguaje* tiene relevancia al menos en *tres sentidos*, los cuales arrastran a su vez notables mejoras para la Lógica. La práctica freguiana *evita los supuestos tácitos (IIIa)*. No podemos ir en el lenguaje más allá de lo convenido y permitido en el metalenguaje. Frege impide la intrusión larvada de nuevos conceptos y de reglas no establecidas, con las limitaciones ya indicadas para las de formación y sustitución de letras latinas¹⁰². Estaba orgulloso de haber basado sus deducciones sobre una sola regla, si bien pronto hubo de abandonar este estilo en *Grundgesetze* por no alargar los procesos sin motivo¹⁰³. Es totalmente consciente de que el número de reglas es

101. J. D. GERGONNE, *Essai de dialectique rationnelle*. «Annales de Mathématiques», 7 (1816-17), pp. 189-228. Un estudio sobre este trabajo puede verse en J. A. FARIS, *The Gergonne Relations*, «The Journal of Symbolic Logic», 20 (1955), pp. 207-231.

102. Cf. III, B, 2.

103. Cf. *Grundg.*, Vol. I, 14-18, pp. 25-34.

arbitrario en orden a la derivación. Y a este propósito hace la aguda observación de que *toda ley lógica puede transformarse en regla de deducción (IIIb)*¹⁰⁴. Sabido es que en esto se fundamentan los diversos sistemas de deducción natural iniciados por G. Gentzen (1909-1945)¹⁰⁵.

El nivel metalingüístico, refiriéndonos ya a la segunda relevancia, permite proyectar cómodas especulaciones sobre la naturaleza de los signos introducidos en la lengua. Frege ciertamente se aprovechó de esta ventaja, legándonos una notable *distinción entre las letras y los demás símbolos (IIIc)*¹⁰⁶. No traducimos por *variables y constantes* porque, según señalábamos más arriba, evitó expresamente esta terminología. La plena conciencia del uso y la naturaleza de la variable le condujo, sin duda, a extender el concepto de función y al empleo de los cuantificadores. Le llevó también a distinguir letras lingüísticas y metalingüísticas, a no mezclarlas nunca, dando a sus construcciones una claridad meridiana. Este hecho tampoco aparece en lógicos anteriores.

El metalenguaje facilita, en tercer lugar, el estudio de propiedades generales relativas al lenguaje. Frege se dio cuenta perfecta de la existencia al respecto de dos niveles lógicos, separando así las *leyes lógicas lingüísticas de las metalingüísticas (III d)*¹⁰⁷. Las leyes metalingüísticas se encaminan, según observábamos anteriormente, a fundar el sistema lingüístico: particularmente los axiomas y reglas¹⁰⁸. Echo en falta una explícita declaración del principio de bivalencia. No hallo en *Begriffsschrift* metateoremas especiales. No se plantean expresamente los problemas de consistencia, independencia, completitud, decisión, dualidad, etc. Tal vez en el párrafo 13 hay alusiones a completitud e independencia. Todo esto pertenece ya a la etapa hilbertiana, un espíritu de hacer lógica que no convencía a Frege.

Pasemos ahora a comentar un poco la *axiomatización compacta (IV)*. Los sistemas axiomáticos son obra de los griegos. Aristóteles estudió profundamente su estructura en los *Analíticos Posteriores*, y aplicó con éxito el método en los *Analíticos Primeros*. Los megárico-estoicos construyeron de este modo su formidable *lógica proposicional*. Los *Elementos* de Euclides sirvieron de fascinante modelo axiomático hasta la nueva sistematización de D. Hilbert. El mismo Frege confesará en

104. *Begr.*, 6, pp. 9-10.

105. G. GENTZEN, *Untersuchungen über das logische Schliessen*. «*Mathematische Zeitschrift*», 39 (1934), pp. 176-210, 405-431.

106. *Begr.*, 1, p. 1.

107. *Ibid.*, 13, p. 25.

108. Cf. Nota 97.

Grundgesetze que su método es euclídeo, si bien va más allá que el griego¹⁰⁹. En todos los sistemas axiomáticos conocidos veía lagunas, no eran compactos. Euclides no explicitaba las reglas de deducción o introducía definiciones inútiles; los matemáticos, además de eso, usaban aquí o allá principios y conceptos no establecidos; con frecuencia se daban saltos mortales en las cadenas deductivas.

Frege evita todo eso, explicita cada detalle. La aplicación del método a la Lógica plantea un problema fuerte, ya que supone una lógica anterior. El filósofo alemán resolvió magistralmente la cuestión, desarrollando tal lógica en el metalenguaje. Vuelve a aparecer la importancia de la distinción de los dos niveles. *Begriffsschrift* admite la posibilidad de varias axiomatizaciones compactas del dominio lógico, superando así en parte la concepción de axioma ligada a la tradición. En otros aspectos se aferró a la misma y luchó sin tregua contra la nueva orientación hilbertiana¹¹⁰.

Me fijaré, por último, en la *definición abreviatura (V)*, ciñéndome exclusivamente a las escasas pero densas observaciones contenidas en *Begriffsschrift*. Recordemos que la composición de las fórmulas definitorias son del tipo $\ulcorner \Gamma \equiv \Delta \urcorner$ ¹¹¹. El doble trazo de juicio \ulcorner indica el doble sentido de una definición dentro de un sistema. Tiene, por una parte, *razón de precepto*. Se manda en ella que el nuevo signo introducido Δ , el definiendum, signifique exactamente lo mismo que la expresión definiens Γ , compuesta con símbolos primitivos del sistema. Posee, por otra parte, *razón de juicio analítico de identidad*, como se desprende del signo de contenido idéntico \equiv . De todo ello se sigue que la nueva expresión Δ *nada añade* al sistema en términos de contenido conceptual. En lenguaje freguiano esto quiere decir que los enunciados derivados con ella pueden asimismo deducirse sin ella. Tiene razón de simple *abreviatura*. Se echa mano de Δ por un sentido *práctico*. Es más manejable que la expresión Γ y pone sobre el tapete el especial interés de la misma entre las frases construibles en el sistema¹¹².

109. Cf. Nota 48.

110. *Begr.*, 13, pp. 25-26. Para la concepción freguiana de axioma y su discusión con D. Hilbert, consúltese JEAN LARGEAULT, *Logique et Philosophie chez Frege*, Paris - Louvain, Ed. Nauwelaerts, 1970, pp. 333-411.

111. Cf. III, B, 2.

112. *Begr.*, 24, p. 56.

Todo esto tiene que ver muy poco con la doctrina de la definición de corte socrático y platónico, incorporada por Aristóteles a la dialéctica en los *Tópicos* y a los sistemas axiomáticos en *Analíticos Segundos*, repetida por cientos de comentaristas de ambos libros, reducida a píldoras indigestas en miles de manuales¹¹³. La concepción freguiana enlaza más bien con la tradición euclídea a través de Leibniz. Tal vez B. Pascal (1623-1662) entendió a la medida de Frege la naturaleza de estas definiciones abreviatura¹¹⁴.

4. *Unidad y estratificación*. Es mérito de Frege haber introducido en la Lógica una especie de *unidad integradora* (VI), superando así muchas dificultades de etapas anteriores. Aristóteles desarrolló casi exhaustivamente la lógica tocante a cierto tipo de enunciados, fijándose sobre todo en las constantes 'es', 'todo', 'alguno', 'necesario', 'posible', 'imposible'. Los megárico-estoicos, en cambio, construyeron una lógica general de enunciados no analizados a base de conectivas. Seguidores y comentaristas de ambas tradiciones nunca lograron comunicarse a satisfacción. Se establecían guerras de primacía. Leibniz y Boole trataron de reducir ambas lógicas a una estructura común. Pero quedaban fuera, sin análisis posible, innumerables enunciados de tipo relacional. Galeno, en la antigüedad, Augusto de Morgan y Peirce, en el diecinueve, habían explorado una lógica de relaciones más bien fragmentaria. Era necesario proceder con un espíritu nuevo. Por eso Frege consiguió integrar todo, al mismo tiempo que lo enriquecía sobremanera¹¹⁵. Lo único que puede achacársele negativamente es haber eliminado los cálculos modales engañado por una concepción incorrecta de sus funtores.

El filósofo germano ha conseguido, por otra parte, una interesante *estratificación de cálculos lógicos* (VII). Siguiendo un elemental principio de simplicidad sintáctica, como hemos expuesto más arriba, la lógica freguiana se presenta en *cuatro estratos*. Se adelanta así a la concepción de los lenguajes graduales $L_0, L_1, L_2, \dots, L_n$, que facilitarán, entre otras cosas, el trato de los problemas de decisión y computabilidad.

La estratificación no se termina en el incuestionable dominio lógico; *se prolonga genialmente hacia la Aritmética* (VIII). La teoría de

113. Por lo que atañe a los *Analíticos Segundos* ver E. CHAVARRI, *Naturaleza de la demostración «propter quid» en los Analíticos Posteriores*, Valladolid, Estudios Filosóficos, 1973, pp. 80-95.

114. B. PASCAL, *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*, en ID., *Oeuvres Complètes*, Ed. J. Chevalier, Paris, Gallimard, 1954, pp. 577 ss.

115. Cf. W. & M. KNEALE, *Op. Cit. in Nota 5*, pp. 510-511.

sucesiones es vieja, sin duda, pero el trato que se le da en *Begriffsschrift* ostenta un rasgo no conseguido anteriormente y del que Frege se muestra muy satisfecho. Me refiero a la generalidad alcanzada. En esta exposición no se mezcla un ápice de intuición, sea empírica o pura ¹¹⁶.

5. *Análisis particulares*. Hay seis rasgos importantes al respecto que compendian bastante bien la situación.

Uno de los conceptos más fundamentales de la lógica de todos los tiempos ha sido el de implicación; *condicionalidad* (Bedingtheit) en la jerga freguiana. Ingenuamente engañados por el lenguaje ordinario, los lógicos han discutido sin tregua durante siglos algunos de los significados asignados a ese vocablo. El análisis freguiano es sumamente sencillo. Define la condicionalidad en términos de valores de verdad, de *estricta función de verdad* (IX) ¹¹⁷.

Se trata evidentemente de un redescubrimiento. Gracias a J. Lukasiewicz sabemos que fue Filón de Megara el primer lógico que la concibe así ¹¹⁸. Sorprende la casi idéntica expresión literal del megárico y el germano a la hora de componer la tabla de verdad ¹¹⁹. Con Peano y Russell entrará de lleno en la lógica moderna, la cual, hasta 1918 con C. I. Lewis, no conocerá nuevas formas de implicación. Paulo Véneto testimonia que algunos escolásticos distinguieron hasta catorce modalidades de enunciados condicionales ¹²⁰.

Frege se da cuenta perfecta de que la condicionalidad definida por él no corresponde al 'si... entonces...' del lenguaje ordinario. El lector deseoso de morar sin prisas en el párrafo 5 de *Begriffsschrift* observará que ahí se detalla un sentido de implicación *puramente lógico*, otro *limpiamente epistémico*, un tercero *lógico-epistémico*, y un cuarto *causal*. Las relaciones causales, no expresables con la sola condicionalidad como función de verdad, se formulan en la nueva lengua con ayuda de la generalidad ¹²¹. Invito también al curioso a considerar la espectacular variedad de traducciones que ofrece Frege de las leyes lógicas a lo largo del libro ¹²².

116. Cf. III, B, 1.

117. *Begr.*, 5, p. 5.

118. J. ŁUKASIEWICZ, *Op. Cit. in Nota 2*, p. 203.

119. Cf. I. M. BOCHENSKI, *Op. Cit. in Nota 4*, pp. 134-135.

120. Cf. *Ibid.*, p. 230.

121. *Begr.*, 12, p. 23.

122. *Begr.*, pp. 28, 33, 34, 35, 36, 43, 44, 45, 46, 48, 49, etc. Ahí se habla de *conexiones causales*, *consecuencias necesarias*, *condiciones suficientes*, *proposiciones*, *circunstancias*, etc.

Otro rasgo notable que presenta *Begriffsschrift* es la *interdefinibilidad de algunas constantes lógicas (X)*. Como hemos resaltado más arriba, partiendo de la condicionalidad y la negación, se expresan fácilmente en la nueva lengua *otras conectivas (Xa)*; con ellas y la generalidad se formulan asimismo *enunciados existenciales, universales y particulares (Xb)*¹²³. Se planteó expresamente el problema de la interdefinibilidad de las conectivas, pues hace la aguda observación de que todo podía haberse escrito con negación y conjunción. No he encontrado, en cambio, intentos de expresar el cuantificador universal con el existencial y la negación. Tampoco introduce signos especiales para las demás constantes lógicas, aunque las usa mucho en la lectura alemana de las fórmulas. No le interesó la cuestión de reducir todas las conectivas a una, a pesar de que expresa claramente los denominados funtores de Peirce y Sheffer.

Encontramos también en *Begriffsschrift* algunas aplicaciones particulares de la tabla de verdad de la implicación al estilo de *método de decisión (XI)*. A veces lo hace directamente, como al comprobar la corrección de la regla de separación o al mostrar la interdefinibilidad de las conectivas¹²⁴. Otras veces indirectamente, suponiendo falsa una ley y derivando de ahí una contradicción¹²⁵. Naturalmente no se halla la depurada técnica actual desarrollada a partir de Wittgenstein, Post, Lukasiewicz, Hilbert-Ackermann, Kotarbinski, Quine, etc.

Hasta aquí, salvo la alusión hecha a la generalidad, nos hemos detenido en rasgos pertenecientes a la lógica de enunciados sin analizar. Pasemos ahora a un estrato superior.

Frege interpreta el signo especial primitivo — del siguiente modo. El trazo horizontal es el *trazo de contenido*, mientras el vertical es el *trazo de juicio*. No debe entenderse juicio en sentido psicológico, como una actividad del espíritu. El trazo de juicio se traduce aproximadamente al castellano por *es un hecho, es verdadero*. Distingue con acierto, como muchos lógicos anteriores a él, entre contenido judicable o proposición (*beurtheilbare Inhalte, Satz*) y juicio. Hay también contenidos no judicables¹²⁶. Llamaremos 'enunciados' a los contenidos judicables.

Desde Aristóteles los contenidos judicables se venían analizando en *sujeto-predicado*, terminología que pasó también a los gramáticos y que

123. Cf. III, B, 2.

124. *Begr.*, 6, p. 7; 7, p. 10 ss.

125. *Ibid.*, 14, pp. 26-28.

126. *Ibid.*, 2, p. 2.

no ha sido superada hasta este siglo. Frege intentó mantener el análisis a la hora de componer *Begriffsschrift*, pero pronto surgieron dificultades sin cuento. Y no hay que admirarse. Invito al lector a descubrir el sujeto y el predicado en cualquier enunciado de la obra. Cansado de las infructíferas complicaciones del análisis tradicional, lo sustituyó por el hoy generalizado *argumento-función* (XII). Llegamos así a la aportación freguiana más revolucionaria.

El concepto de función, tan fértil en el campo matemático, viene a generalizarse e insertarse en el dominio lógico, su propio dominio. Frege no la define aquí con rigor, como lo hace en *Function und Begriff* y en *Grundgesetze*¹²⁷. Sólo nos enseña el modo de abstraerla a partir del lenguaje ordinario o de su propia *Begriffsschrift*, haciendo la fina observación que la función no atañe al contenido de una expresión sino al *modo de considerarla*. Pues de una misma expresión como 'Catón mató a Catón' puedo abstraer tres funciones distintas, según que considere como argumento (expresión sustituible) el primer 'Catón', el segundo o ambos. En general enseña a abstraer funciones de $n+1$ argumentos, dada una función de n argumentos ($n \geq 1$)¹²⁸. No hace falta ponderar las enormes ventajas que contiene este análisis de los enunciados respecto del tradicional aristotélico. La Lógica se convierte sin más en una teoría general de funciones, donde los importantes enunciados relacionales tienen su más natural expresión.

El lógico de Wismar rechazó el análisis tradicional al menos por tres motivos. En *Begriffsschrift*, como señalábamos más arriba, sólo se tiene en cuenta lo tocante a los contenidos conceptuales en relación a sus consecuencias. No interesan los matices distintos de dos expresiones que portan a las *mismas consecuencias*. Esto sucede exactamente con expresiones en que sujeto y predicado se limitan a cambiar de «lugar». De las expresiones ' $a+b=b+a$ ' y ' $b+a=a+b$ ', siendo en la primera ' $a+b$ ' sujeto y en la segunda ' $b+a$ ', se siguen las mismas consecuencias. De otro modo poca importancia tendría la conmutabilidad para la suma. La distinción sujeto-predicado es de tipo *pragmático*, no lógico; tiene perfecto lugar en la correlación parlante-oyente. Cuando el primero quiere orientar la atención del segundo hacia un determinado contenido, suele poner el vocablo correspondiente al citado contenido como sujeto de la frase. El análisis sujeto-predicado, por último, *hace violencia* a todos los enunciados relacionales. Frege se fija

127. Cf. *Tecnos, Función y concepto*, pp. 11-30. *Grundg.*, Vol. I, 1-4, pp. 5-8.

128. *Begr.*, 9, pp. 15-18.

particularmente en los aritméticos, donde sólo artificialmente cabe aplicar la distinción aritotélica¹²⁹.

Estrechamente unida al análisis de los enunciados está toda la *teoría de la cuantificación (XIII)*. Puesto que los (el) argumentos de una función engloban conjuntos de entes, hay que especificar si la función se satisface para todos, alguno, un tanto por ciento o uno sólo. Frege introdujo a este respecto los *cuantificadores*. El nombre procede de Peirce. Los historiadores Kneale, perdiendo tal vez un poco su flema británica, no dudan en calificar el empleo de cuantificadores para ligar variables como «one of the greatest intellectual inventions of the nineteenth century»¹³⁰.

La teoría freguiana de la cuantificación incluye *lógicas de primer orden (XIIIa)* y *lógicas superiores (XIIIb)*, según que no se cuantifiquen o sí respectivamente letras funcionales. Ambas lógicas permiten n argumentos ($n \geq 1$). La proposición 76 de *Begriffsschrift* es la primera que exhibe un cuantificador de orden superior. No necesitamos recordar que la inmoderada cuantificación de letras funcionales condujo a Frege a vérselas con la paradoja de Russell, cosa que en nada empaña el aspecto creador que nos ocupa.

Desde el análisis de los enunciados y la teoría de la cuantificación, el lógico de Wismar viene a *modificar la clasificación «tradicional» de los juicios (XIV)*. En realidad se fija en un modelo kantiano truncado. Admite los pares *universales-particulares* y *afirmativos-negativos*, a condición de no considerarlos particiones de los juicios sino de los contenidos judicables. Esto se percibe diáfamanamente en su escritura, considerando los trazos de juicio y de contenido, pero no tanto en el lenguaje ordinario. No tiene, en cambio, significación lógica alguna la división en *categoricos-hipotéticos-disyuntivos*. No cabe distinción entre hipotéticos y disyuntivos, porque hay interdefinibilidad de conectivas. Por otra parte, los categoricos se expresan con implicación y generalidad. Se trata pues, de diferencias gramaticales.

Rechaza también de plano la clasificación en *apodícticos-assertóricos-problemáticos*, ya que en nada afecta al contenido. P es apodíctico porque *se sugiere* la existencia de juicios universales de los que se deduce; en caso contrario es assertórico. P es problemático cuando el parlante *suspende el juicio*, al desconocer otras leyes de donde se sigue la negación de P ; o P se reduce simplemente a un *particular afirmativo*.

129. *Ibid.*, 3, pp. 2-4; 9, p. 18.

130. W. & M. KNEALE, *Op. Cit. in Nota 5*, p. 511.

El rechazo de esta última clasificación elimina toda la lógica modal, por lo que representa un claro retroceso ante la tradición¹³¹.

Aunque está un poco fuera de lugar, sin embargo no me resisto a subrayar que la crítica freguiana representa un reto a un aspecto de la epistemología kantiana. Pues las categorías fundamentales dependen de la clasificación de los juicios. ¿Mantendría Kant el mismo número después de esta crítica? Apelo a Kant, porque los kantianos la mantendrán sin duda a cualquier precio.

6. *Relaciones especiales*. Bajo este título quiero destacar brevemente algún rasgo de la teoría general de sucesiones, como simple testimonio de la potencia expresiva de *Begriffsschrift*. Anoto, en primer término, las *propiedades hereditarias* (XV), denominadas más tarde clases hereditarias y también clases cerradas¹³². Resaltan simplemente la condición de que algunas relaciones entre x e y transmiten propiedades de x a y . Es un concepto muy fértil para la ciencia formal.

Su primera fertilidad se pone de relieve al concurrir explícitamente en la composición de la llamada por Russell-Whitehead *relación ancestral* (XVI), definida con todo rigor en *Begriffsschrift*¹³³. Con esta relación se construirá en *Grundlagen* la serie de los números naturales. Pero uno de los efectos inmediatos de este concepto en la obra que comentamos es servir de *apoyo a la inducción matemática* (XVII), que Frege denomina «inducción bernoulliana»¹³⁴.

* * *

Este sencillo homenaje a la memoria de Frege había sido programado teniendo presentes cuatro apartados más. Intentábamos a continuación seguir de cerca la *evolución de algunos conceptos de Begriffsschrift* a través de la obra freguiana. Habríamos de referirnos después a la *falta de comprensión, el olvido, el descubrimiento e influjo del lógico de Wismar*. Vendrían, en tercer lugar, una *serie de implicaciones filosóficas* sugeridas por la misma *Begriffsschrift*. En último término evocaríamos un apretado recuerdo literario a través de un *elenco bibliográfico* sin pretensiones. Obligado a escoger una de estas cuatro secciones, me inclino por la última.

131. *Begr.*, 4, pp. 4-5.

132. *Ibid.*, 24, p. 55.

133. *Ibid.*, 26, p. 60.

134. *Begr.*, 27, pp. 63-64.

V. RESEÑA BIBLIOGRÁFICA

A. *Obras de G. Frege*1. *Listas de sus publicaciones*

Un elenco completo de sus *publicaciones* se encuentra en G. FREGE, *Kleine Schriften*, Ed. de I. Angelelli, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1967. Listas casi completas pueden consultarse en G. FREGE, *Estudios sobre semántica*, Trad. de Ulises Moulines, Barcelona, Ariel, 1971; J. V. HEIJENOORT, *From Frege to Gödel*, Cambridge (Mass.), Harvard Univ. Press, 1967; J. LARGEULT, *Logique et philosophie chez Frege*, Paris - Louvain, Nauwelaerts, 1970; I. ANGELELLI, *Studies on G. Frege and Traditional Philosophy*, Dordrecht - Holland, D. Reidel Publ. Co., 1967; CH. THIEL, *Sentido y referencia en la lógica de G. Frege*, Trad. de J. Sanmartín Espluges, Madrid, Tecnos, 1972.

2. *Escritos póstumos*

- G. FREGE, *Nachgelassene Schriften*, Hrsg. von H. Hermes, Hamburg, Felix Meiner, 1969.
 — *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Hrsg. von G. Gabriel, Hamburg, Felix Meiner, 1976.

3. *Colecciones y reimpresiones*

- G. FREGE, *Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logischen Studien*, Hrsg. von G. Patzig, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1962; 1965, 69 y 75.
 — *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, Hrsg. von I. Angelelli, Hildesheim, G. Olms, 1964.
 — *Logische Untersuchungen*, Hrsg. von G. Patzig, Göttingen, Vandenhoeck and Ruprecht, 1966; 1976.
 — *Kleine Schriften*, Hrsg. von I. Angelelli, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1967.
 — *Schriften zur Logik und Sprachphilosophie*, Hrsg. von G. Gabriel, Hamburg, Felix Meiner, 1971.
 — *Schriften zur Logik*, Hrsg. von L. Kreiser, Berlin, Akademie-Verlag, 1972.

- *Die Grundlagen der Arithmetik, eine...*, Breslau, Marcus, 1934; Hildesheim, G. Olms, 1961.
- *The Foundations of Arithmetic, a...*, texto bilingüe, Trad. de J. L. Austin, Oxford, Blackwell, 1950; 2nd revised edition, 1953.
- *Grundgesetze der Arithmetik...*, 2 Vols., Hildesheim, G. Olms, 1962.
- G. FREGE & K. GÖDEL, *Two Fundamental Texts in Mathematical Logic*, Compiled by J. V. Heijenoort, Cambridge (Mass.), Harvard Univ. Press, 1970².
- G. FREGE & E. HUSSERL, *Frege - Husserl Correspondence*. «The Southwestern Journal of Philosophy», 5 (1974), pp. 83-95.

4. Traducciones

- G. FREGE, *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Otros escritos*, Trad. de H. Padilla, México, Univ. Nac. Autónoma, 1972.
- *Estudios sobre semántica*, Trad. de U. Moulines, Barcelona, Ariel, 1971.
- *Escritos lógico-semánticos*, Trad. de Carlos R. Luis y C. Pereda, Madrid, Tecnos, 1974.
- *Los fundamentos de la aritmética*, Trad. de U. Moulines, Barcelona, Ed. Laia, 1972.
- *Sobre sentido y denotación*, Trad. de A. Gómez-Lobo; «Diálogos», 8 (1972), pp. 147-70.
- *Sobre a justificação científica de uma conceitografia e Os fundamentos da aritmética*. Seleção e Trad. de L. E. dos Santos. São Paulo, Abril Cultural, 1974.
- *Logica e aritmetica*. Scritti raccolti a cura di C. Mangione, Torino, P. Boringhieri, 1965.
- *Ricerche logiche*. A cura di C. Lazzerini, Bologna, Calderini, 1970.
- *Écrits logiques et philosophiques*, Trad. de C. Imbert, Paris, Ed. du Seuil, 1971.
- *Les fondements de l'arithmétique*, Trad. de C. Imbert, Paris, Ed. du Seuil, 1970.
- *Translations from the Philosophical Writings of G. Frege*, by P. Geach & M. Black, Oxford, B Blackwell, 1952; 2nd edition, 1960.
- *Begriffsschrift, a Formula Language, Modeled upon that of Arithmetic, for Pure Thought*. En J. V. HEIJENOORT, *From Frege to Gödel*, Cambridge (Mass.), Harvard Univ. Press, 1967.
- *The Foundations of Arithmetic*, Trad. de J. L. Austin, New York, Harper, 1960.

- *The Basic Laws of Arithmetic*, Trad. de M. Furth, Berkeley & Los Angeles, Univ. of Cal. Press, 1964; 2nd printing, 1967.
- *Conceptual Notation and related Articles*, Transl. and Edit. by T. W. Bynum, London - Oxford, Clarendon Press, 1972.
- *The Thought*, «Mind», 65 (1956), pp. 289-311.
- *Compound Thoughts*, «Mind», 72 (1963), pp. 1-17.
- *On the Purpose of the Begriffsschrift*, «Australasian Journal of Philosophy», 46 (1968), pp. 89-97.
- *On Herr Peano's Begriffsschrift and my Own*, «Australasian Journal of Philosophy», 47 (1969), pp. 1-14.
- *The Whole Number*, «Mind», 79 (1970), pp. 481-6.
- *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic*, Translated by E.-H. W. Kluge, New Haven (Conn.) - London, Yale Univ. Press. 1971.
- *Peano's Review of Frege's Grundgesetze*, Edit. and Transl. by V. H. Dudman, «The Southern Journal of Philosophy», 9 (1971), pp. 25-37.
- *On the Law of Inertia*, Transl. by H. Jackson & E. Levy, «Studies in History and Philosophy of Sciences», 2 (1971-72), pp. 195-212.
- *Logical Investigations*, Edit. and Transl. by P. T. Geach, New Haven (Conn.), Yale Univ. Press, 1977.

B. Escritos sobre G. Frege

- AIMONETTO, I.: *Frege e la sintesi numerica*, «Filosofia», 22 (1971), pp. 277-304.
- ANGELELLI, I.: *Studies on G. Frege and Traditional Philosophy*, Dordrecht - Holland, D. Reidel Publ. Co., 1967.
- *On Identity and Interchangeability in Leibniz and Frege*, «Notre Dame Journal of Formal Logic», 8 (1967), pp. 94-100.
- ANSCOMBE, G. E. & GEACH, P. T.: *Three Philosophers. Aristotle, Aquinas, Frege*, Oxford, B. Blackwell, 1961.
- AUNE, B.: *On an Analytic-Synthetic Distinction*, «American Philosophical Quarterly», 9 (1972), pp. 235-42.
- BACHMANN, F. & SCHOLZ, H.: *Der Wissenschaftliche Nachlass von G. Frege*, «Actes du Congr. Intern. de Philosophie», Paris, Sorbona, 1935.
- BARTLETT, J. M.: *Funktion und Gegenstand. Eine Untersuchung in die Logik von G. Frege*, München, 1961 (Tesis doctoral).

- BEAUCHOT, M.: *El problema de los universales en G. Frege*, «Crítica» (México), 26 (1977), pp. 65-89.
- BIERICH, M.: *Freges Lehre von dem Sinn und Bedeutung der Urteile und Russells Kritik an dieser Lehre*, Hamburg, 1951 (Tesis doctoral).
- BIRIOUKOV, B. V.: *La théorie du sens de G. Frege*, «Épistémologie Sociologique», 10 (1970), pp. 37-80.
- BONOMI, A.: *On the Concept of Logical Form in Frege*. En *History of Linguistic Thought*, Ed. by H. Parry, Berlin - New York, Walter de Gruyter, 1976, pp. 719-31.
- BROMLEY, E. D.: *Suggestions on Analytic Sentences*, «Agora», 2 (1972), pp. 33-40.
- BUNGE, M.: *Crítica de la noción fregeana de predicado*, «Revista Latino-americana de Filosofía», 1 (1975), pp. 5-8.
- BYNUM, T. W.: *On an alleged Contradiction lurking in Frege's Begriffsschrift*, «Notre Dame Journal of Formal Logic», 14 (1973), pp. 285-287.
- CANDIESCU, C.: *Predication and Knowledge with G. Frege: Kantianism and Platonism*, «Revue Roumaine des Sciences Sociales», 20 (1976), pp. 127-43.
- CHAKRABARTI, K. K.: *Some Comparisons between Frege's Logic and Navya-Nyaya Logic*, «Philosophy and Phenomenological Research», 36 (1976), pp. 554-63.
- CHURCH, A.: *Outline of a Revised Formulation of the Logic of Sense and Denotation* (Part I), «Nous», 7 (1973), pp. 24-33; *Ibid.* (Part II), «Nous», 8 (1974), pp. 135-56.
- COPI, I. M.: *Frege and Wittgenstein's Tractatus*, «Philosophia» (Ramat-Gan, Israel), 6 (1976), pp. 447-61.
- CURRIE, G.: *Was Frege a Linguistic Philosopher?*, «The British Journal for the Philosophy of Science», 27 (1976), pp. 79-92.
- DESANTI, J. T.: *Sur la «production» des concepts en mathématiques*, «Les Études Philosophiques», 4 (1969), pp. 475-97.
- DUDMAN, V. H.: *Frege's Judgment-stroke*, «The Philosophical Quarterly», 20 (1970), pp. 150-61.
- DUMMETT, M.: *Frege. Philosophy of Language*, London, Duckworth, 1973; New York, Harper and Row, 1974.
- *Frege as a Realist*, «Inquiry», 19 (1976), pp. 455-92.

- EGIDI, R.: *Ontologia e conoscenza matematica. Un saggio su G. Frege*, Firenze, Sansoni Ed., 1963.
- FØLLESDAL, D.: *Husserl und Frege...*, Oslo, Akad., 1958.
- FORGIE, J. W.: *Frege's Objection to the Ontological Argument*, «Nous», 6 (1972), pp. 251-65.
- GEACH, P. T.: *Saying and Showing in Frege and Wittgenstein*, «Acta Philosophica Fennica», 28 (1976), pp. 54-70.
- GROSSMANN, R.: *Reflections on Frege's Philosophy*, Evanston, Northwestern Univ. Press, 1969.
- JONES, E. E. C.: *Mr. Russell's Objections to Frege's Analysis of Propositions*, «Mind», 19 (1910), pp. 373-86.
- KHATCHADOURIAN, H.: *Frege on Concepts*, «Theoria» (Lund.), 22 (1956), pp. 85-100.
- KLEMKE, E. D. (Ed.): *Essays on Frege*, Urbana, Univ. of Illinois Press, 1968. Se recopilan trabajos sobre la *ontologia freguiana* de R. S. Wells, M. Dummett, W. Marshall, G. Bergmann, E. D. Klemke, H. Jackson, R. Grossmann y C. E. Caton.
- KLUGE, E.-H.: *Frege et les termes sans référence*, «Dialogue» (Montréal), 14 (1975), pp. 254-80.
- KNEALE, W. C.: *G. Frege and Mathematical Logic*. En *The Revolution in Philosophy*, London - New York, Macmillan, 1957, pp. 26-40.
- KOENNE, W.: *Die Beziehung Wittgenstein zu Frege in Tractat*, «Wissenschaft und Weltbild», 26 (1973), pp. 135-45.
- LAMBROS, C. H.: *Are Numbers Properties or Objects?*, «Philosophical Studies» (Maynooth, USA), 29 (1976), pp. 381-9.
- LARGEAULT, J.: *Logique et Philosophie chez Frege*, Paris - Louvain, Nauwelaerts, 1970.
- LIMKE, P. F.: *G. Frege als Philosoph*, «Zeitschrift für Philosophische Forschung», 1 (1946-47), pp. 75-99.
- MARTIN, R. M.: *On the Church-Frege Theory of Meaning*, «Philosophical and Phenomenological Research», 23 (1963), pp. 605-9.
- MARTIN, E. J.: *Frege's Problems with «the Concept of Horse»*, «Crítica» (México), 5 (1971), pp. 45-61.
- MARX, W.: *Zur Bestimmung des Begriffes «reines Denken»...*, «Zeitschrift für Philosophische Forschung», 28 (1974), 94-105.

- McDOWELL, J.: *On the Sense and Reference of a Proper Name*, «Mind», 86 (1977), pp. 159-185.
- MEASOR, N.: *Frege, Dummett and the Philistines*, «Analysis», 38 (1978), pp. 10-6.
- MINOGUE, B. P.: *Numbers, Properties and Frege*, «Philosophical Studies» (Maynooth, USA), 31 (1977), pp. 423-7.
- MOHANTY, J. N.: *Husserl and Frege. A new Look at their Relationship*, «Research in Phenomenology» (Pittsburgh), 4 (1974), pp. 51-62.
- MORTAN, G.: *G. Freges philosophische Bedeutung*, Jena, 1954 (Tes. doct.).
- ORAYEN, R.: *Una paradoja en las doctrinas filosóficas de Frege*, «Cuadernos de Filosofía» (Buenos Aires), 14 (1974), pp. 79-89.
- PAPST, W.: *G. Frege als Philosoph*, Berlin, 1932 (Tes. doct.).
- PERRY, J.: *Frege on Demonstratives*, «The Philosophical Review», 86 (1977), pp. 474-97.
- PICARDI, E.: *G. Frege: Opere postume e Lettere*, «Lingua Stile», 12 (1977), pp. 547-81.
- PRAUSS, G.: *Freges Beitrag zur Erkenntnistheorie. Überlegungen zu seinem Aufsatz «der Gedanke»*, «Allgemeine Zeitschrift für Philosophie» (Stuttgart), 1 (1976), pp. 34-61.
- QUINE, W. V. O.: *On Frege's Way out*, «Mind», 64 (1955), pp. 145-59.
- RAY, R.: *Frege's Difficulties with Identity*, «Philosophical Studies» (Maynooth, USA), 31 (1977), pp. 219-34.
- RESNIK, M. D.: *The Frege - Hilbert Controversy*, «Philosophy and Phenomenological Research», 34 (1973-74), pp. 386-403.
- RIVETTI BARBO, F.: *Il «Senso e il Significato» di Frege... En Studi di Filosofia e di Storia della Filosofia in onore di Francesco Olgiati*, Milano, Soc. Ed. Vita e Pensiero, 1962, pp. 420-83.
- RUSSELL, B.: *The Logical and Arithmetical Doctrines of Frege*. En *The Principles of Mathematics*. London, G. Allen & Unwin, 1964², pp. 501-22. ID.: *Los Principios de la Matemática*, Madrid, Espasa-Calpe, 1967².
- SANMARTÍN ESPLUGES, J.: *Notas sobre la verdad en Frege*, «Teorema», 1 (1971), pp. 123-8.
- SCHIRN, M.: (Ed.): *Studien zu Frege. Studies on Frege*. Bd. I: *Logik und Philosophie der Mathematik*; Bd. II: *Logik und Sprachphilosophie*.

- sophie; Bd. III: *Logik und Semantik*, Stuttgart-Bad Constatt, Fromann-Holzboog, 1976.
- SCHOLZ, H. & SCHWEITZER, H.: *Die sogenannten Definitionen durch Abstraktion. Eine Theorie der Definitionen durch Bildung von Gleichheitsverwandtschaften*, Leipzig, 1935.
- SCHORR, K. E.: *Der Begriff bei Frege und Kant*, «Kant-Studien», 58 (1967), pp. 227-46.
- SCHWARTZ, E.: *Remarques sur l'espace des choses de Wittgenstein et ses origines frégréennes*, «Dialectica», 26 (1972), 185-226.
- SINACEUR, H.: *Bolzano est-il le précurseur de Frege?*, «Archiv für Geschichte der Philosophie», 57 (1975), pp. 286-303.
- SINISI, V. F.: *Lesniewski and Frege on Collective Classes*, «Notre Dame Journal of Formal Logic», 10 (1969), pp. 239-46.
- SLUGA, H. D.: *Frege und die Typentheorie*. En *Logik und Logikkalkül*, München, K. Albert, 1962, pp. 195-209.
- *Frege and the Rise of Analytic Philosophy*, «Inquiry», 18 (1975), pp. 471-87.
- *Frege's Alleged Realism*, «Inquiry», 20 (1977), pp. 227-42.
- SMART, H. R.: *Frege's Logic*, «The Philosophical Review», 54 (1945), pp. 489-505.
- SOLOMON, R. C.: *Sense and Essence: Frege and Husserl*, «Intern. Phil. Quarterly», 10 (1970), pp. 378-401.
- STENIUS, E.: *The Sentence as a Function of its Constituents in Frege and in the «Tractatus»*, «Acta Philosophica Fennica», 28 (1976), pp. 71-84.
- STERNFELD, R.: *Frege's Logical Theory*, Southern Illinois Univ. Press, 1966.
- STEVENSON, L.: *Frege's two Definitions of Quantification*, «The Philosophical Quarterly», 23 (1973), pp. 207-23.
- THIEL, C.: *Sinn und Bedeutung in der Logik G. Freges*, Meisenheim, Hain, 1965. ID.: *Sentido y referencia en la lógica de G. Frege*, Trad. de J. Sanmartín Espluges, Madrid, Tecnos, 1972.
- (Ed.): *Frege und die moderne Grundlagenforschung*, Meisenheim, Hain, 1975.
- THIEL, C. - ANGELELLI, I. y otros: Monografía de doce trabajos sobre Frege, en «Studien zur Wissenschaftstheorie» (Meisenheim), 9 (1975).
- *Tendencias constructivas en la obra de Frege*, «Teorema», 6 (1976), pp. 147-60.

- TUGENDHAT, E.: *The Meaning of «Bedeutung» in Frege*, «Analysis», 30 (1970), pp. 177-89.
- VAN HEIJENOORT, J.: *La logique comme calcul et la logique comme langage*, «Épistémologie Sociologique», 7 (1969), pp. 63-9.
- WALKER, J.: *A Study of Frege*, Oxford, B. Blackwell, 1965.
- WELDING, S. O.: *Frege's Conception of Sense and Reference related to Russell's Theory of Definite Descriptions*, «Revue Intern. de Philosophie», 25 (1971), pp. 389-402.
- *Schwierigkeiten in Freges Grundlagen der Logik*, «Kant-Studien», 68 (1977), pp. 420-45.
- WELKER, D.: *Existential Statements*, «The Journal of Philosophy», 67 (1970), pp. 376-88.
- WIENPAHL, P. D.: *Frege's Sinn und Bedeutung*, «Mind», 59 (1950), pp. 483-94).

ELADIO CHAVARRI