Estudios Filosóficos LXXII (2023) 245 ~ 251

PRESENTACIÓN

Javier de Lorenzo
Universidad de Valladolid

El lector tiene en sus manos un paralelepípedo de hojas rectangulares en las cuales las líneas impresas se encuentran en líneas paralelas. Si alza la vista hacia la ventana observará rectángulos inscritos en otros rectángulos: los marcos delimitan el cristal por donde penetra la luz. Las paredes de la habitación son dos a dos paralelas entre sí y, a la vez, perpendiculares a techo y suelo. No ya la habitación, la casa ha sido construida según la geometría métrica euclídea. Al igual que el edificio y la ciudad en la que habita, el tren que le traslada a otra ciudad, los distintos artefactos que maneja y con los cuales y por los cuales vive.

Geometría métrica pero también topología; se pasa de una habitación a otra, de unos entornos a otros con sus fronteras obligadas. Por otro lado, al tomar un café, al realizar la compra, se hacen cuentas y se suma y se resta. Si escucha la radio, oirá el número de muertos en accidentes, de eres, de drones derribados por la aviación ucraniana, de porcentajes, pero también de probabilidades de que se produzca lluvia para el fin de semana próximo.

Geometría métrica, topología, aritmética, probabilidades y algo que se ha convertido en artefacto esencial para todo ciudadano: el móvil. Supone manejar un artefacto cuya base es la programación. Y los algoritmos correspondientes conducirían a hablar desde la inteligencia artificial y su aliado indispensable la robótica hasta de los big data.

Matemática asociada a tecnología como base de nuestra vida. Un hacer indispensable que condiciona nuestros comportamientos, hasta el momento final.

Un hacer que por todo ello exige, obligadamente, ser pensado en lo que denominar Filosofía, Filosofía de la Matemática. Pensamiento que, como todo pensar, muestra su diversidad de caras, de planos, de enfoques. Es lo que el lector encontrará en los ensayos que siguen, escritos por matemáticos y filósofos centrados en pensar la matemática.

La Filosofía de la Matemática tuvo en los finales del siglo XIX y primeros años del siglo XX unos momentos de auténtico esplendor. En esos años se produce una profunda ruptura epistemológica en el hacer matemático: de manejar la ecuación diferencial, la función, la cuádrica como objetos de estudio y, desde su particularidad, alcanzar una cierta generalidad, se pasa a manejar conjuntos, clases, globalidades que, en un primer momento, fueron de puntos y números para pasar, de modo inmediato, a ser de objetos de naturaleza cualesquiera. En metáfora no sé si muy acertada, lo que ahora importa es el rebaño y no cada uno de sus componentes, de tal manera que, al final, tampoco se tiene el rebaño concreto, sino un conjunto de objetos, todos en abstracto, sin importar la naturaleza de tales objetos.

Ello supuso admitir nuevos conceptos con sus niveles y polisemias incorporados; así, el infinito actual, con toda una cohorte de distintos niveles de infinitos, y aceptar nuevos tipos de definición, como la definición por abstracción o implícita, y nuevos modos de razonamiento o formas de manejar antiguos medios, como la definición por inducción completa. Desde los trabajos de Dedekind, manejando clases de números racionales, o de Du Bois-Reymond, Cantor pasó a construir todo un mundo conjuntista con clases de cardinales y de ordinales de órdenes infinitos con objetos de naturaleza desconocida. Con una precisión: si Cantor se limita al manejo de conjuntos sin especificación interna, los demás matemáticos tratan de manejar las globalidades o clases que posean algún tipo de estructura, aunque no importe la naturaleza de sus objetos. Es la línea de Dedekind, la de Du Bois-Reymond.

En paralelo, Frege construye una conceptografía con la que pretende transcribir la Teoría de números y, a partir de aquí, toda la matemática hasta entonces conocida. Una conceptografía que se convertirá, realmente, de simple lenguaje para expresar la aritmética y a partir de ella el resto de la matemática, en una nueva lógica, la denominada lógica formal o matemática. Poco después, Peano escribirá un primer fragmento de la Aritmética en lenguaje estrictamente formal, estableciendo la primera axiomática de la Aritmética.

El manejo de clases o conjuntos hace que la apoyatura en la imagen geométrica se elimine y quede, como mucho, para la enseñanza, pero no para el hacer matemático en sí. Ya la aparición de las funciones denominadas teratológicas había provocado la imposibilidad de su representación: funciones "bien" definidas, pero con infinitos puntos de discontinuidad en su dominio. Era imposible su representación gráfica, al igual que en Geometría Proyectiva se manejaba la clasificación de cuádricas con una imposible representación en el plano. Bien entendido que ello no supone la desaparición del ideograma, sino la aparición de una problemática nueva ligada al lenguaje simbólico, que es esencial para el hacer matemático: se trata, más bien, del paso de un geometrismo a un lenguaje ideográfico más ligado a los procesos algebraicos.

En esta ruptura, y en el hacer que se impone, surgen unas antinomias que parecen destruir la base de las nuevas construcciones. A encontrar remedio, para tratar de fundamentar el nuevo modo de hacer, y ello con terminología arquitectónica, se dedican los matemáticos. Con duras polémicas incluidas, los matemáticos *piensan* sobre su hacer y se van decantando una serie de posturas que, a lo largo del primer tercio del siglo XX, quedan claramente delimitadas bajo los nombres de logicismo, formalismo, intuicionismo.

Matemáticos logicistas son un primer Frege, Peano y especialmente Russell, quien intenta bordear las dificultades antinómicas construyendo una teoría de tipos. El máximo representante del formalismo es David Hilbert, quien hará escuela con su metáfora de la arquitectura de la matemática, que tendrá su máxima expresión en la escuela bourbakista de los años cincuenta. Un intuicionismo estructuralista se iniciará con Poincaré quien, entre otras construcciones, elabora los inicios de la topología algebraica, pero será Brouwer quien, además de su construcción de la topología conjuntista, construirá un enfoque estrictamente finitista apoyado en la intuición.

Son matemáticos que piensan en su hacer, pensamiento que en unos primeros momentos identifican con el de una fundamentación ya segura para el hacer que construyen. Insisto en este hecho: matemáticos, y muy buenos matemáticos, auténticos constructores de nuevas matemáticas, que piensan en su hacer y construyen tres líneas de fundamentación en un primer momento divergentes y con duras polémicas, para ir amortiguándose en el tiempo tales desavenencias. Un pensamiento que no impide que continúen en su trabajo creador estrictamente matemático.

En esa labor otros matemáticos, como los procedentes de la escuela algebraica italiana, con sus representantes en la escuela rusa, van a coincidir con los posteriores trabajos de la escuela bourbakista. Esta surge en los años treinta, pero alcanza su plenitud en los cincuenta. Formada por matemáticos franceses excepcionales, sigue las líneas trazadas por el formalismo de Hilbert e impone su ideología de una matemática única, con su arquitectura propia apoyada en el lenguaje conjuntista, sin llamada a figura geométrica alguna, con un tipo de demostración estrictamente formal y sin enlace con cualquier otro tipo de ciencia: el matemático es matemático y si hay disciplinas con las que en épocas anteriores se tenía un enlace íntimo, así con la física o la filosofía, ahora ese enlace se rompe. Una posición como la de Poincaré indicando que la matemática no podía encerrarse en una torre de marfil hay que eliminarla radicalmente. La ideología bourbakista llega a imponerse incluso en la enseñanza media bajo el nombre de "matemática moderna".

Ideología bourbakista que se impone como dogma desde los mediados del siglo XX y el matemático aparentemente deja de pensar en su hacer: deja a un lado las cuestiones semifilosóficas, semimatemáticas para centrarse en su labor. El matemático parece dejar esa labor en manos de los filósofos. Sin embargo, hay matemáticos que no siguen esa ideología. Así se tiene la figura de Hermann Weyl, que enlaza intuición con axiomática, y en los instantes en los que se está creando Bourbaki, dos normalianos coetáneos, Lautmann y Cavaillés, van a elaborar un pensamiento profundo sobre la matemática como matemáticos, aunque no pudieron seguir al ser fusilados por los nazis poco antes de finalizar la Segunda Guerra.

De modo simultáneo, en los primeros años del siglo XX la Física sufre sus propias rupturas epistemológicas: la teoría de la relatividad, la mecánica cuántica. La imagen de la "realidad" se altera de modo profundo. A discutir esas rupturas, específicamente en la teoría de la relatividad con sus repercusiones en los conceptos de espacio y tiempo, se dedican filósofos ligados a la Escuela de Viena. Filósofos que se van a centrar, igualmente, en la filosofía del lenguaje. Con una inflexión, una filosofía del lenguaje que girará hacia una filosofía analítica.

Desde ella, algunos filósofos pasan a establecer un tipo de filosofía de la matemática centrada básicamente en la discusión de las tres grandes corrientes: logicismo, formalismo, intuicionismo. Una discusión centrada, más bien, en la lógica matemática y en los diferentes matices que se pueden observar en estas tres tendencias. Temas que no afectan al matemático creador. Esta corriente, unida al enfoque puritano bourbakista, hace que la fractura con el hacer matemático sea total y que no haya una filosofía del hacer matemático que practica el matemático.

En el último tercio del siglo XX se produce lo que se denominó una ruptura con la concepción heredada en el caso de las ciencias positivas. En paralelo, en el hacer matemático también se observó un alzarse contra el bourbakismo formalista excesivo y, por supuesto, contra cualquier tipo de fundamentación ya definitiva de una matemática estimada única y dada para siempre. Desde algunos frentes se intenta un pensar la matemática desde dentro de la matemática: tener presente el hacer matemático, lo que de verdad hacen los matemáticos en sus construcciones.

Movimiento que, a su vez, hizo ver que algunos bourbakistas no seguían el credo oficial a rajatabla. También pensaban sobre lo que hacían y, algunos, exigían el enlace con la física, por ejemplo. Y será desde el bourbakismo desde el que surge una de las figuras más grandes del hacer matemático: Grothendick. Su obra supone una inflexión no solo en el grupo Bourbaki, sino en todo el hacer matemático de finales del siglo XX, en la construcción matemática, pero también en el pensamiento sobre esa construcción, como se tiene en sus escritos que se han ido publicando en los últimos años del siglo.

Siguiendo la estela de Grothendieck y usando la matemática para reflexionar sobre la matemática, desarrolla su obra Fernando Zalamea. De amplia cultura, al estilo de los matemáticos creadores, además de hacer y enseñar matemática, ha trabajado la obra de Peirce, ha traducido al español y comentado la obra matemática de Lautmann, ha escrito un monumental libro sobre

Grothendieck, ha publicado *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas* y, en un giro, inicia un nuevo enfoque, una Crítica del hacer matemático con la idea de captar el auténtico proceso creador del matemático.

Es en la misma línea en la que se sitúa Luis Español, matemático e historiador de la matemática con obras como la dedicada a Julio Rey Pastor o la Historia de la Real Sociedad Matemática Española. Desde una breve historia de la teoría de conjuntos cantoriana llega a la axiomatización de la teoría de categorías realizada por Lawere. Inmediato, y aceptando la expresión de Cantor de que la "esencia de la matemática es la libertad", expone la aparición de teorías de conjuntos alternativas a la cantoriana, al estilo de las geometrías no-euclídeas, obtenidas a partir de la teoría de categorías y topos. Menciona la integración de la lógica intuicionista como instrumento matemático y realiza una breve comparación entre la matemática clásica y la intuicionista, campo en el que menciona alguna de sus contribuciones originales.

A finales del siglo pasado y primeros años del siglo XXI surge un movimiento de carácter más filosófico, aunque ligado en parte con algunos matemáticos, que se quiere centrar en la práctica matemática y que llega a fundar una Asociación Internacional de la Práctica Matemática. Es a esta línea de pensamiento a la que se ligan los ensayos que siguen.

Uno de los fundadores de esta Asociación es José Ferreirós. De entre sus trabajos se puede mencionar que ha traducido y estudiado la obra de Dedekind, la de Riemann, ha intentado desarrollar alguno de los puntos programáticos de la Asociación en su *Knowlegde and the Interplay of Practices*. En el ensayo actual se pregunta por el carácter explicativo o no del principio de inducción completa, que es, para Poincaré, el modo más auténtico y constructivo del hacer matemático. Razonamiento por inducción completa que, en su aparente simplicidad, es de muy difícil captación y manejo, como puso de relieve Piaget en alguno de sus estudios epistemológicos.

Tras haber realizado una síntesis del pensamiento matemático hasta la obra de Grothendieck, y desde la óptica del matemático, Frédéric Patras, en su *La pensé mathématique contemporaine*, ha trabajado sobre la Esencia y *La posibilité des nombres*. Atendiendo a matemáticos como Lautmann y Cavaillés en especial, en este ensayo apunta a la necesidad de una epistemología propia del hacer matemático siguiendo, en parte, a la fenomenología husserliana, pero tratando, siempre, de captar el modo de hacer del matemático.

Jesús Alcolea es autor de más de cien ensayos acerca del pensamiento matemático, y quien completó la bibliografía de la segunda edición revisada y ampliada de la antología editada por Tymocko *New Directions in the Philoxophy of Mathematics*. Aquí se cuestiona el problema de la comprensión y si la demostración proporciona esa comprensión de la proposición demostrada.

A finales del siglo XX y primeros años del XXI han surgido dos intrusos que, de alguna manera, están condicionando el comportamiento humano y, en particular, el hacer matemático: el ordenador e internet. Si el primero podía considerarse un auxiliar en la computación, se ha mostrado como artefacto más poderoso, convirtiéndose en auténtico instrumento operacional. Lo mismo en el caso del segundo intruso. Han llegado a modificar, en parte, el propio comportamiento del matemático. A Javier Echeverría se le puede calificar de leibniziano puro por la amplitud de sus preocupaciones filosóficas. Acaba de publicar una espléndida biografía: *Leibniz: el archifilósofo.* También ha centrado su preocupación en lo que califica de Tecnociencia. Es lo que nos muestra en su ensayo, donde llega a más: no solo el manejo del computador ha modificado el hacer matemático creando, realmente, un nuevo estilo, sino que ha ido más allá. El manejo del computador ha creado, junto a las dos realidades que menciono en mi ensayo, una nueva realidad que, en su terminología, se puede denominar *tecnorrealidad*. En ella hay que destacar el comportamiento de las tecnopersonas. Todo un cambio provocado por la unión del hacer matemático, la tecnología y el orden económico. En el fondo, la consumación de un mundo de artefactos.

En otro orden de cosas, Santiago Pérez-Cacho, matemático, trata de mostrar cómo el número natural que, con la geometría, está en el origen del hacer matemático, permite formular conjeturas que, en su aparente simplicidad, muestran una complejidad tal en su intento de demostración, que siguen sin poder ser demostradas al cabo de siglos. Como ejemplo, el llamado último teorema de Fermat. Tras tres siglos de continuados esfuerzos para lograr su demostración, esta se ha logrado a finales del siglo XX por procedimientos nada elementales. Aparente simplicidad y también aparente alejamiento de cualquier tipo de aplicación práctica para, como siempre ocurre con el hacer matemático, terminar encontrando esa aplicación, en este caso en terrenos de la criptografía, y convertirse en una herramienta esencial para la seguridad de las transacciones o el encriptamiento de los mensajes militares.

En 1971, y frente al imperio bourbakista, publiqué *Introducción al estilo matemático*. Frente a la idea de un hacer único y ya dado para siempre, mostraba un hacer con sus discontinuidades manifestadas en estilos diferentes, un hacer siempre abierto con una dinámica propia. En esta línea, mantenida desde entonces, se inscribe mi ensayo. Desde las dos realidades –la perceptiva o vivida, la cuántica–, se ve el hacer matemático en paralelo a otros haceres como el literario o el musical. Todos ellos como construcciones que obligan a ser estudiadas y asimiladas por quienes se inician en estos campos. Al encontrar un trabajo ya realizado por matemáticos de épocas anteriores surge la idea de que ese hacer está ahí, en un mundo eidético ya dado. Una ilusión como la de considerar que una ciudad a la que se llega no fue construida anteriormente sino que se encontraba ahí, desde siempre y realizada no se sabe por quién ni para qué. El hacer matemático es una construcción, nunca cerrada ni acabada, realizada por los matemáticos.

Deseo expresar mi agradecimiento al director de esta revista, Sixto Castro, quien sugirió la posibilidad de publicar unos ensayos acerca de la Filosofía de la Matemática. Igualmente, agradecer a cada uno de los autores su generosa disposición para colaborar en esta empresa.

Javier de Lorenzo
Departamento de Filosofía
Universidad de Valladolid
Plaza del Campus s/n
47011 Valladolid
javierdelor@gmail.com