HACIA UNA CRÍTICA MATEMÁTICA

TOWARDS A MATHEMATICAL CRITIQUE

Fernando Zalamea
Universidad Nacional de Colombia

Resumen: *En contraposición con nociones estándar de "filosofía (de la) matemática" (analítica, sintética, historicista, práctica), proponemos la conformación de un nuevo campo de reflexión –la crítica matemática– que entra sintonía natural con otras críticas del saber (literaria, artística, musical, fílmica). La crítica matemática se basa sobre cuatro estrategias básicas –ver, describir, calibrar, elucidar– dirigidas a obtener una comprensión fiel y plena de los haceres matemáticos. Ofrecemos un registro de labores previas de cuatro grandes críticos culturales (Warburg, Benjamin, Schenker, Kracauer) y de cuatro "pioneros" de la crítica matemática (Shaw, Lautman, de Lorenzo, Châtelet), mediante los cuales conformamos una visión estructural –fibrada y hacificada– del campo.*

Palabras clave: *Haceres matemáticos, crítica cultural, crítica matemática, estructuras, haces.*

Abstract: *In contraposition with standard notions of "mathematical philosophy" (analytical, synthetical, historical, oriented to practice), we propose the construction of a new field of thought –mathematical criticism– akin to other cultural criticisms (literary, artistic, musical, filmic). Mathematical criticism is based over four basic strategies –seeing, describing, calibrating, comprehending– oriented to offer a full and faithful understanding of the mathematical experience. We look at four fundamental works in cultural criticism (Warburg, Benjamin, Schenker, Kracauer) and four fundamental "pioneers" in mathematical criticism (Shaw, Lautman, de Lorenzo, Châtelet), over which we propose a structural, sheaf-theoretical, rendering of the field.*

Keywords: *Mathematical practices, cultural critique, mathematical critique, structures, bundles.*

1. A menudo, en la mal llamada "Filosofía (de la) Matemática", la matemática se ha olvidado, y ha sido reemplazada por consideraciones lingüísticas y especulativas, muy distantes de las creaciones originarias de los matemáticos. Esto ha resultado particularmente patente en el caso de la "filosofía analítica" anglosajona. Algunas perspectivas alternas han intentado regresar a las matemáticas (*e.g.* una "filosofía sintética", o una "filosofía de la práctica matemática"), pero una calibración justa de la situación indica que un entendimiento profundo de la *creatividad matemática*, orientado a observar con precisión la fábrica misma de los haceres matemáticos, según la expresión afortunada de Javier de Lorenzo, queda aún por realizarse.

En ese orden de ideas, una simple *razón Pascaliana* debe dirigir nuestras investigaciones: "la *crítica matemática* debe ser, para las matemáticas, lo mismo que las *críticas literarias, artísticas, musicales o* fílmicas lo son para la literatura, el arte, la música o el cine" (ver *Figura 1*). Uno de los resultados básicos de esta aproximación resulta ser que la "crítica matemática" (A) se encuentra muy lejos de los caminos usuales adoptados en las corrientes normales de la "filosofía matemática" (B). En esa distinción, creemos que la perspectiva (A) sirve a la matemática de una manera más *plena y fiel*, que no solo ayuda a explorar mejor la disciplina matemática ("en sí"), sino que ofrece caminos de conexión natural entre la matemática y la cultura ("en otro").

$$\frac{\text{Matemática}}{\text{Crítica Matemática}} = \frac{\text{Literatura / Arte / Música / Cine}}{\text{Críticas Culturales (Lit / Art / Mus / Film)}}$$

Figura 1
Razón pascaliana: hacia una crítica matemática afín a las críticas culturales

2. Por su práctica misma, las críticas literaria, artística, musical o fílmica se *sumergen en el trabajo creativo* de los escritores, artistas, músicos o directores. En ese sentido, es imposible entender la literatura, el arte, la música o el cine modernos y contemporáneos sin entrar en detalle en las obras de Proust, Manet, Beethoven o Wiene, por solo mencionar algunos ejemplos. De manera similar, la *crítica literaria* se eleva sobre la figura de Walter Benjamin (y su análisis de Proust, por ejemplo), la *crítica artística* lo hace sobre Aby Warburg (y sus disecciones de Manet), la *crítica musical* sobre Heinrich Schenker (y sus taxonomías de Beethoven), y la *crítica fílmica* sobre Siegfried Kracauer (y sus estudios de Wiene). En esas labores, se procede según una estrategia bien definida: (1) *mirar* con cuidado las obras en cuestión (*La Recherche*, *Le Dejeuner*, los *Cuartetos*, o *Caligari*), (2) *describir* con precisión lo observado, (3) *calibrar* los sistemas así descritos, (4) *elucidar* el proceso de los mecanismos creativos involucrados. Con ello, se consigue así *realmente sentir y entender* la literatura, el arte, la música o el cine.

Siguiendo el *motto* de Pascal –"el corazón tiene razones que la razón no conoce"– tenemos que tener en cuenta tanto un aspecto *sensorial* ("corazón = "co-razón", dualidad obtenida plenamente solo en español), como un aspecto *racional* ("razón"), para captar la complejidad de un campo del saber. En particular, si el campo tiende a ser muy *creativo*, necesitamos constantemente un *ir y venir* ("back-and-forth" cantoriano) entre las perspectivas (1)-(4) para poder capturar de manera *plena y fiel* ese campo del saber (ver *Figura* 2). Nos encontramos entonces en un *continuo vaivén pendular* entre análisis y síntesis, observación y especulación, localización y globalización, inmersión y emergencia. La *crítica matemática* no debe nunca priorizar una perspectiva sobre las demás, ni debe nunca aceptar reduccionismos empobrecedores. Gracias a ese talante abierto, la *multidimensionalidad* del pensamiento matemático emerge con suficiente densidad, *combinando* palabras e imágenes, pruebas e hipótesis, teoremas y errores, tipos concretos y arquetipos universales.

Ese vaivén puede ser representado por un funtor, que captura contextos ("categorías"), obstrucciones (bordes de "adjunciones") y transferencias ("transformaciones naturales"). Si seguimos a Francastel, quien señalaba cómo el arte y las matemáticas son los polos mayores de la creatividad humana, la matemática se verá muy enriquecida con una *crítica matemática*, donde serán de gran utilidad las extrapolaciones de los procesos (1)-(4) dentro de la disciplina.

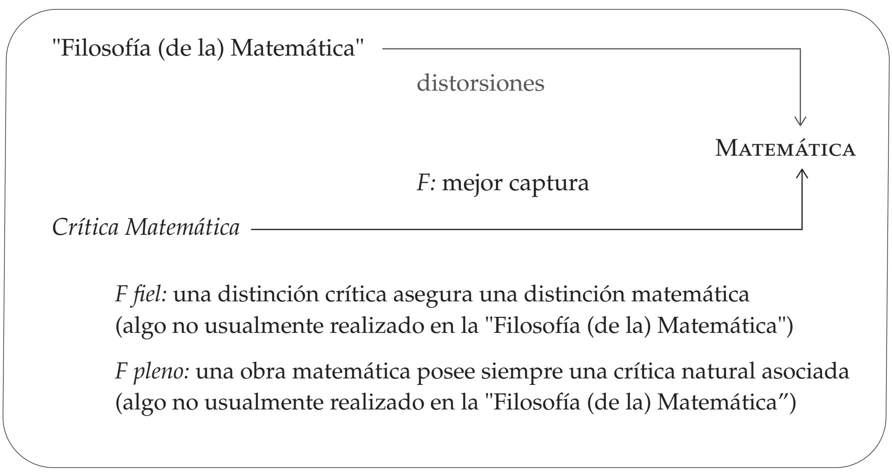


Figura 2

Un funtor pleno y fiel: emergencia de una "crítica matemática" afín a la matemática

3. Una elaboración de las bases sintéticas sobre las que se elevan los grandes críticos alemanes de inicios del siglo XX (Warburg, Benjamin, Schenker, Kracauer) permite desbrozar algunas fuerzas fundamentales en juego: *(i) oscilación* (estudios de Warburg sobre temas de la Antigüedad recuperados en el Renacimiento), *(ii) residuación* (investigaciones de Benjamin sobre los *Pasajes* de París y la reconstrucción de la ciudad a partir de sus fragmentos), *(iii) integración* (desarrollos musicales de Schenker sobre un subyacente *Ursatz* universal), *(iv) fluxión* (reflexiones de Kracauer sobre el montaje fílmico). Estas cuatro fuerzas centrales pueden acoplarse con otras tres perspectivas potentes procedentes de la crítica cultural: *(v) inmersión* (penumbras exploradas en los *Cahiers* de Valéry), *(vi) inversión* (la *Perspectiva Invertida* según Florenski), *(vii) marginalización* (extensa tradición latinoamericana de reflexión sobre los bordes y fronteras del saber: Henríquez Ureña, Reyes, Ortiz, Martínez Estrada, etc.)

Estas siete fuerzas pueden ser *proyectadas* en lo que podemos llamar un *Plano de Crítica Cultural* [PCC], que puede ser luego *inyectado* en un *Plano de Crítica Matemática* [PCM]. La construcción de una *crítica matemática* estructuralmente sólida consistirá luego en realizar una *fibración y hacificación* de ese plano [PCM] (ver *Figura 3*).

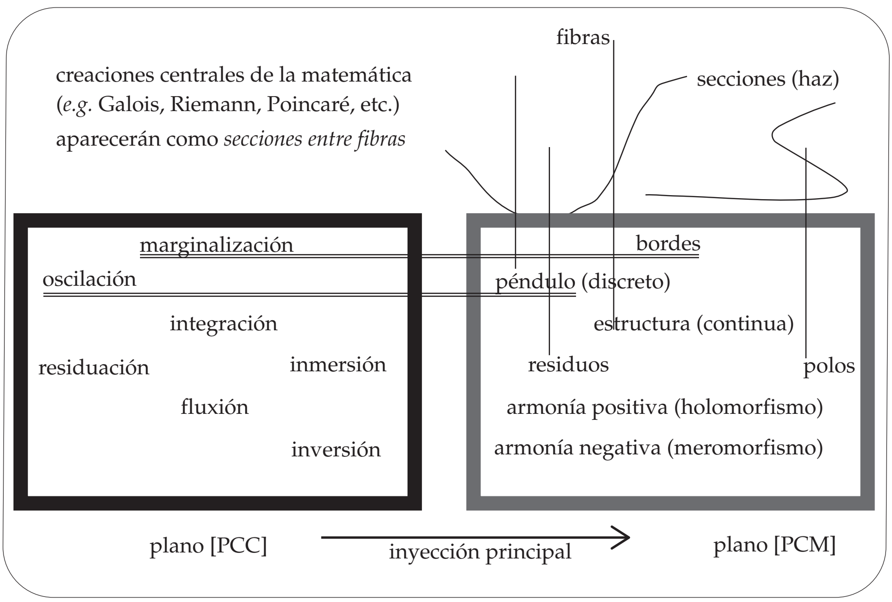
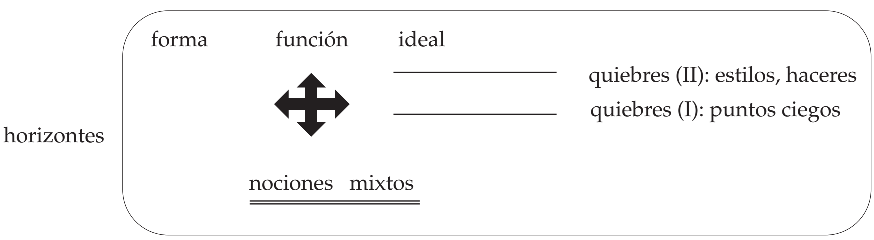


Figura 3

Cosolidación de la crítica matemática como despliegue fibrado y hacificado del plano [PCM]

4. En la conformación del campo de la *crítica matemática*, una mirada retrospectiva permite detectar fácilmente algunos de los que podríamos llamar "pioneros de la crítica matemática", es decir, aquellos pensadores que reflexionaron sobre la matemática *abriéndose de manera sistemática a un rango amplio de exploraciones*: acceso a las obras relevantes (saber "ver"), detección de técnicas precisas (saber "describir"), registro de fuerzas principales (saber "calibrar"), inmersión profunda en la comprensión del entorno matemático (saber "elucidar"). Algunos de esos pensadores, usualmente denominados "filósofos de la matemática", pero que entendemos aquí mejor como "críticos de la matemática", son James Byrnie Shaw (USA, 1866-1948), Hermann Weyl (Alemania, 1885-1955), Albert Lautman (Francia, 1908-1944), Jean-Toussaint Desanti (Francia, 1914-2002), Gilles Châtelet (Francia, 1945-1999) y Javier De Lorenzo (España, n. 1939).

En lo que sigue, en contrapunto con los cuatro grandes críticos culturales alemanes que revisamos anteriormente, nos concentraremos en cuatro de esos "pioneros de la crítica matemática": Shaw, Lautman, Châtelet y De Lorenzo. Podemos resumir sus aportes principales bajo los siguientes rubros: *(a)* detección del "corazón" de la matemática alrededor de concepciones de formalidad, funcionalidad e idealidad (Shaw, *Lectures on the Philosophy of Mathematics*, 1918), *(b)* visión efectiva de la geografía matemática a través de mixtos, nociones e ideas (Lautman, *Tesis Doctorales Principal y Secundaria*, 1938), *(c)* comprensión de las complejidades creativas de la matemática vía puntos ciegos, horizontes virtuales y gestualidades diagramáticas (Châtelet, *Les enjeux du mobile*, 1993), *(d)* reconocimiento de las variaciones de la práctica matemática, a través de estilos, haceres y estructuraciones múltiples (De Lorenzo, *Introducción al estilo matemático*, 1971). Los aportes de Shaw, Lautman, Châtelet y De Lorenzo se encuentran *fuera de cauce* –en bordes geográficos, sociales o conceptuales–, lo que les permite trazar sus reflexiones con suma originalidad, alejados de los dogmas o corrientes normales del momento. Si concentramos ahora esas diversas perspectivas bajo un nuevo *Plano de los Pioneros de la Crítica Matemática* [PPCM], obtenemos el diagrama siguiente (ver *Figura 4*), cuyas *tensiones esenciales* permiten hacer explotar ("blow-up") el *instrumentario de la crítica matemática*.



plano [PPCM]

Figura 4

Despliegue de perspectivas alternas en los pioneros de la crítica matemática

En el plano [PPCM], las tensiones dialécticas y pendulares entre lo ideal y lo formal, mediadas por aspectos funcionales y elevadas a través de nociones y mixtos, se ven resquebrajadas gracias a las disrupciones provistas por reveses e inversiones de haceres, gestos y estilos. El resultado ofrece una visión particularmente dinámica de la matemática, siempre en gestación, *siempre atenta a lo negativo, al límite, al borde*. Cualquier dogma, o cualquier intento de reduccionismo, *estalla* ante ese movimiento permanente.

5. Si ahora nos adentramos en una *fibración y hacificación* del plano [PPCM], de manera acorde a como lo hicimos con el plano [PCM], obtenemos una *estructuración de la crítica matemática* que se superpone naturalmente con lo señalado arriba en la *Figura 3*. En este caso, las *fibras* se pueden distribuir de la siguiente manera:

- encima de (1) la forma, (2) la función y (3) la idea (Shaw), emergen (1a) diversas variaciones topológicas (topología algebraica a la Poincaré, álgebra topológica a la Grothendieck, etc.), (2a) diversas variaciones categóricas (categorías a la Mac Lane, alegorías a la Freyd, etc.), y (3a) diversas variaciones conceptuales (conjuntos clásicos a la Cantor, despliegues intuicionistas a la Brouwer, etc.);
- encima de (4) las nociones y (5) los mixtos (Lautman), se sitúan (4a) las definiciones contextuales y (5a) las transformaciones/tránsitos/traducciones entre áreas de la matemática;
- encima de (6) los puntos ciegos y (7) los horizontes virtuales (Châtelet), se despliegan (6a) una comprensión positiva vía reveses y negatividades (como en la teoría de los residuos de Cauchy o en el teorema de Riemann-Roch) y (7a) una visión de estructuras fluctuantes en gestación (como en diversas teorías de cuantización o aproximación, a la Kontsevich o Gromov);
- encima de (8) los estilos y (9) los haceres (De Lorenzo), se ramifican (8a) múltiples formas de enfocar la matemática (contrastando los *Elementos* de Bourbaki con *Cosechas y siembras* de Grothendieck, por ejemplo) y (9a) diversas aproximaciones axiomáticas (como las aritméticas de Peano y de Heyting, o la teoría homotópica de tipos de Voevodsky).

Una vez establecidas estas diversas fibras (1a)-(9a) como orientación básica primigenia para urdir las redes de una *crítica matemática suficientemente densa* –con posibilidades por tanto de capturar las complejidades de la disciplina–, muchas *secciones* entre las fibras ofrecen un adecuado inicio de exploración de los saberes matemáticos modernos y contemporáneos. Por ejemplo, la teoría de Galois puede entenderse como sección entre las fibras (5a) y (7a), el teorema de uniformización de las superficies de Riemann como conexión entre (1a) y (6a), la construcción de la homología y la homotopía de Poincaré como enlace entre (1a) y (5a), los teoremas de las base de Hilbert como secciones entre (4a) y (9a), los teoremas de incompletitud de Gödel como contrapuntos entre (3a) y (9a), la teoría de topos de Grothendieck como resolución de una dialéctica entre (2a) y (8a), etc. El resultado neto de esta *fibración y hacificación de la crítica matemática* consiste entonces en proveer, con cierta claridad, una *elucidación* de la práctica matemática, después de las etapas de *calibración* (secciones), *descripción* (fibras) y *visión* (plano [PPCM]) necesarias para conseguir tal fin.

6. Un complemento de las estrategias hasta ahora señaladas para elevar una crítica matemática estructuralmente sólida, asociada a un instrumentario amplio de perspectivas, se obtiene gracias a lo que hemos venido llamando los modelos [RTHK] (Superficies de <u>R</u>iemann sobre <u>T</u>opos de <u>H</u>aces sobre Modelos de <u>K</u>ripke). En estos modelos se conjugan la *historia* (K: gracias a modelos de Kripke para el intuicionismo, sobre órdenes temporales ramificados), la *fenomenología* (H: gracias a haces donde se integran los fenómenos, ideas y técnicas matemáticas), la *metafísica* (T: gracias a la emergencia de invariantes universales) y la *cultura* (R: gracias a ramificaciones y enlaces de conceptos abstractos con realizaciones sensibles)[1]. Con los modelos [RTHK] (ver *Figura 5*), se obtienen los requerimientos de la crítica indicados en la *Figura 2*. En efecto, por un lado, un funtor fiel y pleno se consigue inmediatamente gracias a las muchas *distinciones* que ofrecen los modelos [RTHK]: ya al nivel del haz "fenomenológico" (H), la *fidelidad* se obtiene gracias a las buenas propiedades topológicas (homeomorfismo local) de la proyección entre ideas y técnicas, y la *plenitud* resulta de las propiedades conjuntistas (sobreyectividad) de la proyección. Por otro lado, las mediaciones esenciales buscadas en una correcta crítica matemática se obtienen, siguiendo una lectura técnica, gracias al nivel "metafísico" (T) –donde emergen los grandes invariantes globales de los haceres matemáticos, después de recorrer sus variaciones locales–, y, siguiendo una lectura cultural, gracias al nivel de "irradiación /ramificación" (R) –donde ciertos resultados matemáticos se contraponen, analógica y metafóricamente con obras literarias, artísticas, musicales o fílmicas–.

[1] Véase Fernando ZALAMEA, *Modelos en haces para el pensamiento matemático*, Bogotá, Universidad Nacional de Colombia, 2022.

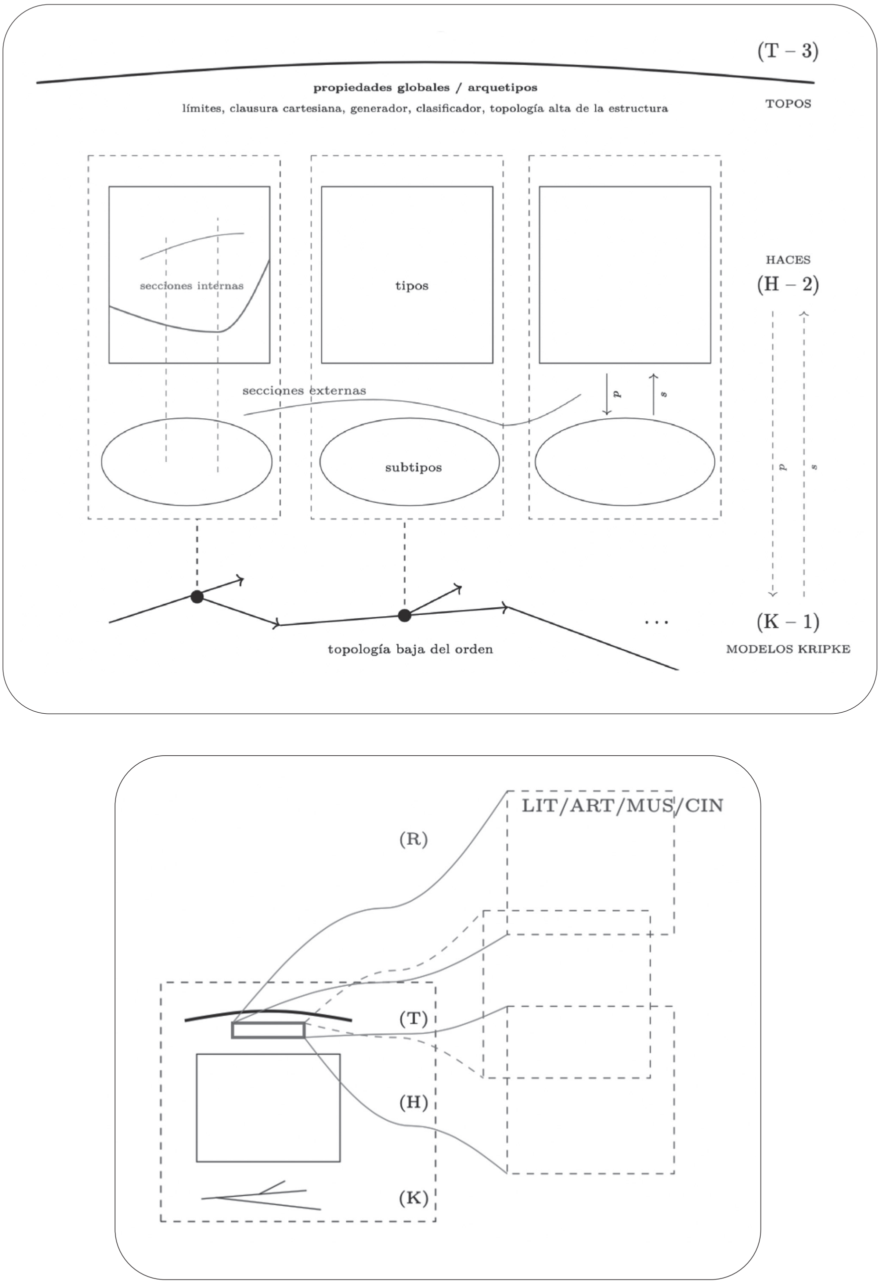


Figura 5
Un modelo [THK] y su expansión posterior a la cultura [R]

Hemos iniciado entonces a desbrozar diversas perspectivas que pueden ayudar a implementar *estructuras ricas de sostén* para la construcción de una crítica matemática fiel y plena:

- planos plegados [PCC], [PCM], [PPCM];
- sus despliegues fibrados y hacificados;
- los modelos [RTHK].

Una conjugación de esas diversas perspectivas teóricas y una aplicación extensa del entramado abstracto resultante deben dar lugar en el futuro a una conformación adecuada del nuevo campo de la *crítica matemática*.

Fernando Zalamea
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Carrera 45 N° 26-85 - Edificio Uriel Gutiérrez
Bogotá D.C., Colombia
fernandozalamea@gmail.com