Estudios Filosóficos LXXII (2023) 263 ~ 292

ASPECTOS DE LA OBRA DE CANTOR APRECIADOS DESDE LA TEORÍA DE CATEGORÍAS Y FUNTORES

ASPECTS OF CANTOR'S WORK APPRECIATED FROM CATEGORY AND FUNCTOR THEORY

Luis Español González
Universidad de La Rioja

Con deuda y afecto a
F. W. Lawvere (1937-2023)

Resumen: *Con los recursos de la teoría de categorías iniciada a mediados del siglo XX y de su fragmento, la teoría de topos a partir de 1970, ha sido posible clarificar algunas de las intuiciones originales y profundas de Cantor sobre la naturaleza de los conjuntos abstractos dejadas de lado cuando Zermelo axiomatizó a principios del siglo la teoría de conjuntos. Este «paraíso de Cantor» defendido por Hilbert frente a los intuicionistas ha sido generalizado por los topos de Grothendieck-Lawvere-Tierney, que proporcionan múltiples modelos formales de teoría de conjuntos en los que interpretar las matemáticas clásicas e intuicionistas.*

Palabras clave: *Conjuntos, formalismo, intuicionismo, categorías, topos.*

Abstract: *With the resources of category theory initiated in the middle of the twentieth century and its fragment, topos theory from 1970 onwards, it has been possible to clarify some of Cantor's original and profound intuitions about the nature of abstract sets left aside when Zermelo axiomatized set theory at the beginning of the century. This "Cantor paradise" defended by Hilbert against the intuitionists has been generalized by the Grothendieck-Lawvere-Tierney topos, which provide multiple formal models of set theory in which to interpret classical and intuitionistic mathematics.*

Keywords: *Sets, formalism, intuitionism, categories, topos.*

Los conjuntos ofrecidos por Cantor a las matemáticas a lo largo del último cuarto del siglo XIX, con aportaciones significativas de Dedekind, fueron concebidos por Cantor como «abstractos» a medida que investigaba sobre conjuntos infinitos «concretos» de números o puntos. Justificaba su indagación esgrimiendo la libertad de creación matemática frente a las restricciones del constructivismo finitista de Kronecker. En la creación de Cantor, tan original y profunda, abundan intuiciones e imprecisiones necesitadas de clarificación, algunas de las cuales fueron dejadas de lado en la axiomatización realizada por Zermelo en 1908, bajo la influencia de Hilbert; así institucionalizada, la teoría de conjuntos, utilizada en general por los matemáticos de modo intuitivo, fue consagrada por Hilbert en 1929 como un paraíso inexpugnable frente a los embates del intuicionismo personificado, principalmente pero no solo, en Brouwer[1]. Los conjuntos y las aplicaciones entre ellos formaron la categoría *Set* en cuanto tal noción fue hecha explícita por Eilenberg y Mac Lane en 1945 como abstracción generalizadora de casos concretos presentes en el hacer matemático del momento. Mi propósito en las páginas que siguen es dar cuenta de algunos análisis clarificadores de la obra conjuntista de Cantor realizados desde la teoría de categorías y funtores surgida y desarrollada durante la segunda mitad del siglo XX.

Las categorías, los funtores entre categorías y las transformaciones naturales entre funtores paralelos (que relacionan las mismas categorías) surgieron como un lenguaje técnico útil para describir los procesos de la topología algebraica. Llegaron de la mano del formalismo en un momento en que la disputa ideológica sobre los fundamentos perdía intensidad. Lo que inicialmente parecía un mero lenguaje se fue transformado en teoría a mediados los años cincuenta, cuando surgieron las categorías de haces de Grothendieck (*topos de Grothendieck)* relativos a *Set* y los funtores adjuntos; en la década siguiente, con una concentración de resultados brillantes en 1964, llegaron caracterizaciones abstractas de ejemplos concretos significativos de categorías, la más decisiva de las cuales, por su influencia posterior, fue la caracterización de *Set* realizada por Lawvere, y el primer teorema de existencia de funtores adjuntos con condiciones adicionales a la conservación de límites o colímites. Otro momento importante de este desarrollo tuvo lugar en 1970, cuando Lawvere y Tierney fijaron mediante axiomas de primer orden en el lenguaje de la teoría de categorías el concepto de *topos elemental*, entendido de inmediato como una teoría de conjuntos con lógica intuicionista que en casos particulares puede ser booleana. Los modelos de topos elemental más relevantes para el hacer matemático eran los topos de Grothendieck, los muy amplios de *prehaces* o

[1] Abundan las referencia sobre estas cuestiones. Véase J. Ferreirós, *Labyrinth of thought. A history of set theory and its role in modern mathematics*, 2nd rev. ed., Basel, Birkhäuser, 2007 para este tramo del recorrido de la teoría de conjuntos, y J. de Lorenzo, *Matemática e ideología. Fundamentalismos matemáticos del siglo XX*, Madrid, Plaza y Valdés, 2017 para la ideología y los fundamentos de la matemática.

los de *haces*, más reducidos y útiles; todos ellos construidos y relacionados canónicamente con la categoría de conjuntos, que es el topos básico. De ahora en adelante, me referiré siempre a *topos* (igual en singular que en plural) y el contexto se encargará de indicar si se trata del marco general axiomático o de una de sus concreciones. Desde este marco conceptual se analizó el significado del axioma de elección, su relación con el tercio excluso y otras cuestiones controvertidas sobre los conjuntos cantorianos.

La teoría de conjuntos cantoriana y las diversas suministradas por los topos están disponibles para que pueda ser comprendida o clarificada la realidad material de pensamiento acumulada por el hacer matemático o alguno de sus ramas. Puede apreciarse una cierta analogía entre este hecho y la existencia de diversas geometrías, la primera la euclídea, disponibles para modelar y explicar el espacio físico observable por los sentidos y los instrumentos que los prolongan. La gran novedad de la diversidad de teorías de conjuntos fue incorporar al hacer matemático la lógica intuicionista, no tanto como rechazo de la clásica booleana al estilo del primer intuicionismo militante, sino como su generalización en la matemática formalizada. Las categorías y los topos introdujeron la dinámica en una estática teoría de conjuntos clásica, múltiples teorías de conjuntos intuicionistas son posible con transferencias de teoremas entre ellas al hacer «matemáticas en los topos».

Agradecimiento: Como se aprecia en el lema de cabecera, el autor debe mucho de lo que va a exponer a Bill Lawvere, cuya muerte el 23 de enero de 2023 fue una noticia dolorosa cuando estaba terminando de componer estas páginas, que le dedico agradecido por lo que aprendí de él y por el afecto acumulado durante los momentos que compartimos en el deambular académico internacional.

Primera parte: la doble abstracción de Cantor

La potencia y los conjuntos abstractos

La noción de «potencia» es clave en la emergencia de los conjuntos cantorianos abstractos. Fue introducida a través de conjuntos concretos en dos artículos publicados en el *Journal de Brochard*[2]. En el nº 77 (1874), Cantor prueba que el conjunto de los números algebraicos es numerable y que el de los reales no lo es; lo hace sin introducir el término «potencia», que aparece en el nº 84 (1878), dedicado a la biyección entre el conjunto de los números reales y el de las n-tuplas de números reales con n>1. Entre ambos artículos cruzó

[2] Citaré la obra de Cantor a través de la traducción de Carlos Gómez Bermúdez, *G. Cantor. Sistemas de números y conjuntos*, A Coruña, Universidade da Coruña, 2009, a la que me referiré con las iniciales CGB del autor. La afirmación citada aparece en la página 179 de dicha obra. Los artículos mencionados del *Journal de Brochard* (antes y después *Journal de Crelle*) están en las páginas 77 y 94 de CGB respectivamente.

cartas con Dedekind pidiendo su conformidad con la prueba de un resultado que era contrario a sus prejuicios («lo veo pero no lo creo», escribió), en las que aparece la cuestión de la continuidad de la biyección, sobre la que en 1879 publicó una prueba de que una biyección entre números y n-tuplas con $n>1$ no puede ser continua[3].

Cantor establece la potencia como una equivalencia entre dos conjuntos dada por una biyección (nomenclatura actual) entre ellos, en virtud de la cual ambos «tienen igual potencia». Introduce este concepto trabajando con conjuntos concretos, finitos o infinitos, de números (o puntos, pues supone dada la correspondencia biunívoca entre números reales y puntos de la recta por el «principio de continuidad»), pero enseguida se da cuenta de que se trata de una noción general abstracta. Escribió en 1882:

> También el concepto de potencia […] podría más bien considerarse un atributo de toda variedad bien definida, cualquiera que sea la naturaleza conceptual de sus elementos.
>
> A una variedad (una colección, un conjunto) de elementos, pertenecientes a cualquier esfera conceptual, la llamo bien definida cuando en base a su definición y siguiendo el principio lógico del tercio excluso, debe verse como internamente determinado tanto el si un objeto cualquiera perteneciente a la misma esfera conceptual pertenece o no como elemento a dicha variedad, como también si dos objetos pertenecientes al conjunto, son iguales uno a otro o no a pesar de diferencias formales en la manera de presentarlos[4]

Deja claro el último párrafo citado que el tercio excluso asigna la opción binaria al valor de verdad de la pertenencia, lo que se ha de aplicar también a la verdad o no de la igualdad entre dos elementos de un conjunto. No obstante, Cantor reconoce que puede haber dificultades para «una determinación actual (externa)» de modo efectivo de la pertenencia o la igualdad «en casos concretos», pero defiende la «determinación interna» como posibilidad conceptual. Cita como ejemplo que no hay duda de la determinación interna del conjunto de los números reales algebraicos, aunque «todavía es una cuestión abierta» si el número es algebraico o trascendente[5]. Dicho esto, añade un párrafo que necesitaría una mayor explicación (me referiré a él más adelante), en el que afirma con imagen geométrica la posibilidad de tener conjuntos con

3 Como otras pruebas presentadas por entonces era imprecisa, fue definitiva la realizada por Brouwer en 1910 y publicada un año después, cuando el autor holandés se promocionaba como matemático normal antes de volcarse en atacar el paradigma vigente con el arsenal intuicionista.

4 Cita tomada (p. 139 de CGB) del nº 3 de la serie de artículos publicados en *Mathematische Annalen* entre 1879 y 1884, con el título común «Sobre variedades lineales infinitas de puntos», que les da el aspecto de un único artículo por entregas.

5 Considera la segunda opción «altamente probable», algo que confirmó Lindemann el mismo año 1882.

elementos de diversa naturaleza, de los que unos serán puntos y otros estarán formados por puntos. El párrafo en cuestión dice así:

> Si se trata de una variedad geométrica, cuyos elementos pueden ser no sólo puntos sino también líneas, superficies o cuerpos, entonces, cuando está bien definida, se presenta enseguida la cuestión de su potencia, y esta última será, o bien igual a una de las potencias de los conjuntos de puntos existentes, o será mayor que todas ellas.

Cantor afirma que ha tomado el término potencia de los estudios de Steiner sobre la geometría proyectiva de las cónicas, en los que aparecen biyecciones entre configuraciones que conservan ciertos elementos. Equivalencias desde ciertos puntos de vista entre constructos geométricos fueron habituales durante el siglo XIX, cuando reinaba la geometría proyectiva con sus proyectividades. El ejemplo más sencillo y genuino de proyectividad plana se daba entre el haz de rectas que pasan por un punto y los puntos de una recta que no pasa por el vértice del haz, lo que llevó a Steiner a expresar que la recta y el haz tenían la misma "potencia", eran configuraciones equivalentes desde el punto de vista proyectivo porque se establecía entre ellas un tipo específico correspondencia biyectiva[6]. Esta terminología que Steiner también usó con las cónicas fue la adoptada por Cantor para la coordinación biunívoca de conjuntos concretos y abstractos[7].

La equivalencia fue aplicada también por Cantor a conjuntos provistos de una relación de orden entre sus elementos, estableciendo biyecciones entre ellos que conservaban la relación de orden. Lo hizo en un artículo de 1885 sobre «teoría de tipos de orden», que permaneció inédito, y después en otro publicado en 1887. Con la potencia así considerada, obtenía Cantor el número cardinal de un conjunto y con la correspondiente a los tipos de orden entre conjuntos bien ordenados resultaban los números ordinales.

En la década siguiente, Cantor realizó una exposición más sistemática y completa de su teoría de conjuntos en dos *Beiträge* (1895 y 1897)[8]. Allí cambió algo su enfoque inicial sin modificar la definición de conjunto, aunque la simplificó y aportó simbolismo escribiendo $M=\{m\}$ (ahora ponemos $m \in M$). Su definición fue: «Por "conjunto" entendemos toda agrupación en un todo

6 Véase la biografía de Steiner por J. J. Burkhardt en Charles C. Gillispie, F. L Holmes (ed.), *Dictionary of scientific biography*, New York, Ch. Scribner's Sons, 1970-1990, donde se cita la obra de Steiner *Vorlesungen über synthetische Geometrie* (1867) a la que se refirió Cantor.

7 Un tipo de equivalencia geométrica más global, que Cantor no mencionó, fue la mostrada por Klein (*Programa de Erlangen*, 1872) entre geometrías determinadas por un conjunto de puntos sobre el que actúa transitivamente un grupo de transformaciones.

8 El inédito citado fue publicado por Grattan-Guinness en 1970. Ver pp. 292–312 de CGB. Para los tipos de orden de 1887 ver 5.2.1 y 4.11 para los "Beiträge"; ambas referencias están en CGB.

M de objetos *m* determinados y bien diferenciados, de nuestra intuición o de nuestro pensamiento, (que se llamarán los "elementos" de *M*)».

La correspondencia biyectiva entre dos conjuntos los hace «equivalentes», en símbolos de Cantor $M \sim N$, pero ahora presenta la potencia con independencia de esta equivalencia, como un nuevo conjunto asociado al conjunto *M* previamente dado:

> Llamamos "potencia" o "número cardinal" de M al concepto general, que resulta del conjunto M cuando, con ayuda de nuestra capacidad activa de pensar, se hace abstracción de la naturaleza de sus diferentes elementos m y del orden en que están dados.
>
> Al resultado de este doble acto de abstracción, el número cardinal o potencia de *M* lo designamos con $M^{=}$[9].
>
> Puesto que todo elemento individual , si se prescinde de su naturaleza se convierte en una "unidad", entonces el número cardinal $M^{=}$ es él mismo un conjunto determinado compuesto de unidades puras, que tiene existencia en nuestro espíritu como imagen o proyección intelectual del conjunto dado $M^{=}$.

Cantor establece la relación entre esta versión de potencia y la equivalencia demostrando que un conjunto es equivalente a su potencia ($M \sim M^{=}$) y que dos conjuntos son equivalentes si y solo si tienen la misma potencia ($M \sim N$ si y solo si $M^{=}=N^{=}$). A continuación, con estos números cardinales que son conjuntos, desarrolla la aritmética cardinal y la comparación de cardinales, donde es un tema central la ley de tricotomía. Después, en el segundo *Beiträge* de 1897, hace lo propio con los ordinales.

Cantor dejó abiertas o incompletas algunas cuestiones importantes de las que se ocuparon matemáticos de las siguientes generaciones. Por ejemplo, dio por supuesto que todo conjunto podía ser bien ordenado y pensó que los cardinales del conjunto **N** de los números naturales y del **R** formado por los números eran contiguos, la llamada hipótesis del continuo, que intentó demostrar sin éxito.

Su incipiente teoría fue inicialmente desarrollada, ya en el siglo XX, en dos direcciones. Como una teoría intuitiva de conjuntos la plasmó Hausdorff en *Grundzüge der Mengenlehre* (1914), obra dedicada, en este orden, a conjuntos (abstractos), conjuntos ordenados y espacios topológicos definidos por entornos. Por otra parte, Zermelo siguió la propuesta formalista de Hilbert al presentar en 1908 una teoría axiomática de conjuntos referida a los conjuntos abstractos. Siendo que Cantor investigó propiedades de conjuntos concretos numéricos (*Mengen*) entre cuyos elementos hay una «cohesión» (terminología de Lawvere) dada por relaciones de orden y de proximidad, y que su proceso

9 Cantor pone las paralelas sobre la letra, aquí irán como superíndice por razones tipográficas.

creativo le condujo a abstraer esa estructura interna y concebir los conjuntos abstractos (*Kardinalen*) subyacentes formados por «unidades puras», resultó que Zermelo axiomatizó tan solo el aspecto de la teoría cantoriana referido a los conjuntos cardinales. Esto fue así porque Zermelo (al igual que Frege) consideró insatisfactorio el modo de definición de los *Kardinalen* propuesto por Cantor mediante un «doble acto de abstracción» a partir de los *Mengen*. Los elementos o unidades puras de un *Kardinal* tienen que ser distintos una vez que ha desaparecido el *Menge* originario y ya no queda propiedad alguna que permita distinguirlos. Esta contradicción llevó a Zermelo a plantear directamente una teoría de los *Kardinalen* en forma axiomática, eliminando la mención a los *Mengen* para soslayar la contradicción que apreciaba en el proscrito procedimiento de abstracción. Esto sucedía al inicio del siglo y en su década final Lawvere vio «la contradicción en un sentido productivo» desde la teoría de categorías, mediante el uso de los *funtores de olvido* que aplican una categoría de *Mengen* en la categoría de los *Kardinalen.*

Categorías y funtores, lenguaje y teoría

La teoría de categorías y funtores surgió en los años cuarenta del pasado siglo como un lenguaje matemático capaz de expresar la complejidad de los procesos de la topología algebraica y dos décadas después ya se había convertido en una teoría muy general y abstracta con su propio desarrollo conceptual y problemática, además de aplicaciones en ramas cada vez más variadas de las matemáticas.

Un problema topológico básico era saber si dos espacios con diferente determinación eran o no homeomorfos, es decir, había entre ellos biyecciones inversas ambas continuas, lo que hacía que los espacios fueran equivalentes desde el punto de vista topológico, esto es, que tuvieran las mismas propiedades topológicas[10]. Asociando cantidades algebraicas a los espacios, la topología algebraica reducía la equivalencia topológica a una equivalencia algebraica de más fácil solución. En las primeras décadas del siglo XX había cristalizado la formulación abstracta de las estructuras algebraicas que venía gestándose desde el último cuarto del siglo XIX (en torno a la teoría de Galois y los enteros algebraicos), de modo que una cuestión central en la nueva imagen del álgebra fue clasificar los modelos de las diferentes estructuras

[10] Este problema esencial formulaba de manera amplia y abstracta la clasificación de superficies que ocupó a Listing, discípulo de Gauss, en los años cuarenta del siglo XIX (véase J. B. Gómez, "Listing y el primer libro de Topología", en *La Gaceta de la RSME* 23(2) (2020), 389–404 para una visión rápida del trabajo de Listing). El desarrollo de este asunto fue uno de los vectores que llevaron a la configuración de la topología como disciplina matemática particular, otro fue la teoría de los conjuntos de puntos iniciada por Cantor. Referencias clásicas son J. H. Manheim, *The genesis of point set topology*, Oxford, Pergamon Press, 1964, y J.-C. Pont, *La topologie algébrique des origins à Poincaré*, Paris, PUF, 1974.

identificando los que son isomorfos mediante correspondencias biyectivas que conservan las operaciones. Reuniendo estas características comunes de los espacios y las cantidades, la topología algebraica formulaba invariantes algebraicos de los espacios de modo que la solución del problema del homeomorfismo entre los espacios viniera ayudada por la solución del problema similar algebraico.

Esta estrategia de investigación inspiró el lenguaje formulado por Eilenberg y Mac Lane (1945) en tres niveles: categorías, funtores y transformaciones naturales[11]. Una *categoría* C está formadas por *objetos* denotados X, Y,… y *morfismos* entre un objeto llamado *dominio* y otro llamado *codominio*, denotados $f{:}X\to Y$ (X es el dominio e Y el codominio) con una *composición* parcial $gf{:}X\to Y$, que se da cuando $g{:}Y\to Z$ y tiene la propiedad *asociativa*, y para cada objeto una *identidad* $id_X{:}X\to X$ neutra para la composición. Estos son los conceptos primitivos de un lenguaje diferente del de los conjuntos que tiene como primitivos los conjuntos X, sus elementos x y la pertenencia $x\in X$. Dos objetos son *isomorfos*, $X\cong Y$, si existen morfismos $f{:}X\to Y$ y $g{:}Y\to X$ tales que $gf=id_X$ y $fg=id_Y$; entonces se dice que f y g son *isomorfismos* inversos. Las identidades son isomorfismos, la composición de isomorfismos es un isomorfismo y el inverso de un isomorfismo es único.

Las relaciones entre categorías se establecen mediante correspondencias entre sus objetos y morfismos que conservan las composiciones y las identidades. Un *funtor* $F{:}C\to D$ toma un morfismo $f{:}X\to Y$ en C y lo transforma en otro $F(f){:}F(X)\to F(Y)$ en D, conservando identidades y composición. Un funtor siempre envía isomorfismos en isomorfismos. El elenco de nociones de la teoría de categorías se completó con las *transformaciones naturales* de un funtor en otro, ambos entre las mismas categorías, de modo que los funtores pueden aparecer como objetos de categorías cuyos morfismos son las transformaciones naturales. Algo indicaré sobre el simbolismo de estas transformaciones en la segunda parte de este ensayo.

El lenguaje de las categorías no recoge lo que sea un objeto en sí mismo, sino las relaciones del objeto con los que con él comparten la categoría. Los objetos se definen salvo isomorfismo, una propiedad de un objeto enunciada en dicho lenguaje será también propiedad de los objetos isomorfos a él.

En el momento fundacional, la topología algebraica inspiradora utilizaba, por una parte, categorías de espacios como la formada por los espacios

[11] Hay una variada gama de textos para estudiar categorías. El más clásico es S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, New York, Springer, 1971. Una introducción didáctica recomendable es el libro de F. W. Lawvere y S. H. Schanuel, *Matemáticas conceptuales: Una primera introducción a categorías*, México, Siglo XXI Ed., 2002, que tuvo ediciones previas en inglés en 1991 y 1997. Los filósofos pueden preferir A. Badiou, *Mathematics of the transcendental*, edited, translated and with an introduction by A. J. Bartlett and A. Ling, London, Bloomsbury, 2017.

topológicos y las aplicaciones continuas entre ellos, denotada *Top* y, por otra, categorías de álgebras como la *Ab* formada por los grupos abelianos y los homomorfismos. De modo más general se puede tomar la categoría *Mod* de los módulos sobre un anillo *R* con las aplicaciones lineales entre ellos, cuando el anillo es el de los números enteros resulta *Ab*. Asociar grupos abelianos a los espacios mediante funtores (homología) H:$Top \to Ab$ permitía concluir que f no es un homeomorfismo (isomorfismo en *Top*) cuando $H(f)$ no es un isomorfismo de grupos. Quedó identificada desde el principio la categoría *Set* de los conjuntos y las aplicaciones entre ellos, con un *funtor olvido* $Top \to Set$ que asocia a cada espacio el conjunto subyacente, a cada morfismo su aplicación subyacente (y el funtor olvido análogo $Ab \to Set$). Estas categorías y funtores olvido tienen entre sí diferencias notables. En *Set* hay un conjunto mínimo $\varnothing$, el vacío sin elementos, y conjuntos con un solo elemento biyectivos dos a dos, el estándar es $1=\{0\}$. El vacío está caracterizado por una propiedad enunciada en el lenguaje de las categorías (sin referencia a elementos) que lo determina salvo biyección: para cada conjunto X existe una única aplicación $\varnothing \to X$, por la que se dice que el conjunto vacío es objeto *inicial* en *Set*. Con la única topología que puede tener, también $\varnothing$ es objeto inicial en *Top*, pero ningún grupo abeliano es vacío porque ha de contener al menos el elemento neutro, el 0 en notación aditiva, así que el conjunto vacío no resulta como olvido de un grupo abeliano. No obstante, el grupo mínimo $\{0\}$ es objeto inicial en *Ab*, siendo el único homomorfismo $\{0\} \to A$, el que envía 0 en el elemento neutro de A. Y también verifica la propiedad *dual* de ser objeto *final*: para cada grupo abeliano A existe un único homomorfismo $A \to \{0\}$. La *dualidad* es un aspecto importante y fructífero en las categorías. Cada categoría C tiene una categoría *dual* C^{op} con los mismos objetos que C y «flechas invertidas»: los morfismos $X \to Y$ en C^{op} son los morfismos $Y \to X$ en C; aplicando dos veces dualidad volvemos a la misma C. Cada noción general en lenguaje de categorías tiene su dual. La noción de objeto inicial aplicada a C^{op} da la noción de objeto final en C. Un funtor F:$C^{op} \to D$ se dice *contravariante* en C mientras que un estándar con dominio C es *covariante*. Esta distinción no tiene importancia formal en cuestiones generales, tan categoría es una cualquiera como su dual, pero su uso se ha generalizado para mantener el lenguaje abstracto próximo a los ejemplos concretos significativos en el más habitual hacer matemático; por ejemplo, los haces de Grothendieck son funtores contravariantes sobre categorías reconocibles.

En *Set* es final el conjunto $1=\{0\}$, que solo admite una topología con la que pasa a ser también objeto final en *Top*. De modo que las categorías *Top* y *Set* tienen ambas objetos inicial y final no isomorfos y el funtor olvido los conserva, mientras que *Ab* tiene también objetos de ambos tipos pero confundidos en uno y el funtor olvido solo conserva el objeto final; puede decirse que la categoría de espacios *Top* «se parece más» a *Set* que la categoría de cantidades *Ab*. El papel del objeto final en *Set* es identificar cada elemento $x \in X$ con la aplicación $1 \to X$ que envía 0 a x, que obviamente es inyectiva. Como todas las aplicaciones con dominio 1 son continuas, lo mismo sucede en *Top*. Por el contrario, en *Ab* hay un único homomorfismo $1\to A$, el que aplica en el elemento neutro de A; para determinar mediante homomorfismos todos los elementos $a\in A$ hay que recurrir al grupo abeliano $\mathbf{Z}$ de los números enteros: un homomorfismo $f:\mathbf{Z}\to A$ está completamente determinado por la imagen $a=f(1)\in A$ de la unidad.

Como bien explicó Mac Lane[12], a lo largo de la década de los cincuenta se pasó de considerar las categorías y los funtores herramientas de lenguaje útiles a verlos como constituyentes de una teoría con su propio desarrollo, transformación en la que fueron esenciales el uso de los *haces* por Grothendieck (1957), funtores con valores en *Set* formando categorías con las transformaciones naturales, y los *funtores adjuntos* de Kan[13].

Una *adjunción* consiste en un par de funtores $F:C\to D$ y $G:D\to C$ tales que los morfismos de la forma $F(C)\to D$ en D se corresponden biunívocamente con los morfismos de la forma $C\to G(D)$ en C, siendo estas biyecciones compatibles de modo *natural* con la composición con otros morfismos. Se dice que F es adjunto a izquierda de G y que G es adjunto a derecha de F; la adjunción se denota $F \dashv G$: $D\to C$. Un funtor adjunto (a derecha o a izquierda) de otro dado no existe en general, pero si existe es único salvo un isomorfismo natural. Otra importante propiedad es que el funtor que tiene adjunto a izquierda conserva límites (objeto final, productor fibrados, etc.) y el que lo tiene a derecha conserva colímites (objeto inicial, coproductos fibrados, etc.). La adjunción es una relación entre dos categorías más débil que la equivalencia natural, de hecho, los funtores adjuntos inducen una equivalencia entre sendas subcategorías específicas que la propia adjunción determina. Las «equivalencias naturales» que aparecen en el título del artículo fundacional de Eilenberg y Mac Lane son los actuales *isomorfismos naturales*, noción más rígida que la general actual de *equivalencia natural* que usamos desde Grothendieck (1957).

Para que este concepto ganara importancia fue decisivo que Kan exhibiera ejemplos no elementales en ámbitos concretos de las matemáticas, incluso algunos sorprendentes en su momento en la teoría de homotopía. Las adjunciones ofrecen una formulación más adecuada de los *problemas universales* de Bourbaki, con una familia de ejemplos formada por los *funtores libres* adjuntos a izquierda de los funtor olvido de las estructuras algebraicas. El grupo abeliano libre $L(X)$ asociado a un conjunto X es el conjunto de todas

[12] Cf. S. MAC LANE, "Concepts and categories in perspective", en P. DUREN (ed.) *A Century of Mathematics in America, Part I*, Providence, AMS, 1988, pp. 323–365.

[13] D. M. KAN, "Adjoint functors", en *Trans. Amer. Math. Soc*. 87 (1958) 294-329. La génesis de los haces está expuesta en J. W. GRAY, "Fragments of the history of sheaf theory", en M. P. FOURMAN, C. J. MULVEY, D. S. SCOTT (eds.) *Applications of sheaves: Proceedings Durham 1977*, LNM nº 753, Berlin, Springer, 1979, pp. 1-79. La evolución conceptual de las categoría en R. KRÖMER, *Tool and object. A history and philosophy of category theory*, Basel, Birkhäuser, 2007. Una breve y significativas síntesis del inicio de la categoría es E. J. DUBUC, "Categorías. Los 30 primeros años", en *La Gaceta de la RSME* 17.2 (2014) 333-347.

la combinaciones lineales finitas $\Sigma_i n_i x_i$ de elementos $x_i \in X$ con coeficientes números enteros $n_i \in \mathbf{Z}$, construcción que se extiende a un funtor $L{:}Set \to Ab$ adjunto a izquierda del olvido $O{:}Ab \to Set$. La adjunción $L \dashv O$ significa que cada homomorfismo de grupos abelianos de la forma $f{:}L(X) \to A$ queda completamente determinado por la aplicación restricción $f{:}X \to \mathrm{O}(A)$; en efecto, basta conocer cada $f(x)$, $x \in X$, para que un homomorfismo f, precisamente por serlo, conserve las combinaciones lineales finitas con coeficientes enteros, que en *L(X)* son expresiones sintácticas y en A toman el significado específico dado por la suma definida en el grupo abeliano. Este funtor olvido no tiene un adjunto a derecha porque no conserva el objeto final. El funtor olvido de *Top* tiene adjuntos a izquierda y a derecha.

Los axiomas de Lawvere para la categoría de los conjuntos

Una de las primeras cuestiones que se suscitaron en la incipiente teoría de categorías durante los años sesenta fue caracterizar las categorías concretas en uso, lo que significa dar una lista de axiomas adicionales a una categoría genérica para que resulte equivalente a la que se quiere caracterizar. Entre las primeras consideradas estuvieron las de módulos sobre un anillo usadas en topología algebraica, caracterizadas como categorías abelianas simultáneamente por Mitchel[14] y Freyd[15] en la costa este norteamericana. El mismo año, del lado europeo, tuvo lugar la caracterización por Giraud de los topos de Grothendieck[16]

En este contexto efervescente, apareció, de nuevo del lado norteamericano, el artículo de Lawvere titulado «Una teoría elemental de la categoría de conjuntos»[17]. Zermelo había formulado axiomas para conjuntos constituidos por sus elementos, se definieron las aplicaciones entre ellos como un tipo especial de relaciones y llegó la categoría *Set*. La tarea de Lawvere fue determinar en el lenguaje de las categorías unos axiomas elementales (en lógica de primer orden) de modo que una categoría S que los satisfaga es equivalente a *Set* si

[14] B. Mitchell, "The full imbedding theorem", en *Amer. J. Math*. 86 (1964) 619–637.

[15] P. J. Freyd, *Abelian categories: An introduction to the theory of functors*, New York, Harper & Row, 1964.

[16] El resultado de Giraud es del curso 1963/64 en el seminario de Grothendieck en París, pero la publicación se retrasó hasta quedar recogido en la exposición de Grothendieck y Verdier (1972). En M. Bunge, *Categories of Set-valued functors*, Dissertation, Univ. of Pennsylvania, 1966 están caracterizadas las categorías de prehaces.

[17] F. W. Lawvere, "An elementary theory of the category of sets", en*Proceedings of the National Academy of Science of the U.S.A.* 52 (1964) 1506-1511. Véase también F. W. Lawvere, "Cohesive toposes and Cantor's "lauter Einsen", en *Philosophia Mathematica* 2 (1994) 5-15 y del mismo "An elementary theory of the category of sets (long version) with commentary", en *Reprints in Theory and Applications of Categories* 11 (2005) 1-35, el segundo accesible en la red. Es una edición, a cargo de C. McLarty, del texto completo no publicado en 1964, con una introducción del editor y un comentario del autor. Mitchel, Freyd y Lawvere, al igual que Marta Bunge, eran entonces jóvenes en la estela de Eilenberg y Mac Lane.

verifica un axioma adicional no elemental: existencia de límites y colímites (categoría *bicompleta*). El cambio fue radical, una sustitución del lenguaje para determinar mediante axiomas la categoría S, de modo que conjunto/aplicación significa objeto/morfismo de S, sin que haya una determinación individual de los conjuntos mediante sus elementos, que podrán recuperarse como morfismos de un tipo especial. De este modo, el fondo fundacional de las matemáticas se retrotrae al lenguaje de las categorías, lo que llevó a Lawvere[18] a plantear «la categoría de las categorías como fundamento de las matemáticas» en el congreso de La Jolla (California) de 1965.

Una vez supuesta una categoría S, con sus objetos y morfismos, Lawvere la va sometiendo a axiomas sucesivos que le permiten ir desarrollando una «teoría de conjuntos de primer orden en lenguaje categórico». Los ocho axiomas, que denotaré S1 a S8, van divididos en tres bloques, el primero formado por los axiomas S1-3, el segundo por los S4-5 que llamó «axiomas especiales», y el tercero por los axiomas S6-8, que se refieren a los «elementos» definidos después del axioma S1. Siguen los ocho axiomas, con algún comentario sobre su significado.

Axioma S1. Existen límites y colímites finitos. Este axioma implica que la categoría S tiene un objeto final, habitualmente denotado 1 (en *Set* es $1=\{0\}$). Lo que da pie a llamar «elementos» de un objeto a los monomorfismos $x{:}1\to X$ y a escribir $x\in X$ como abreviatura con alcance puramente notacional, lo que de momento puede resultar confuso pero es práctico y se justifica *a posteriori* por la equivalencia final de S con *Set*. Este primer axioma contempla también la existencia de un objeto inicial en S, habitualmente denotado 0 (en *Set*, 0 es el vacío). Hay un monomorfismo $0\to 1$ obligado por las definiciones y la existencia de un elemento $1\to 0$ implicaría un isomorfismo $1\cong 0$ que vendrá impedido por un axioma posterior, así que 0 no tendrá elementos. En cuanto a los límites y colímites binarios, el axioma S1 dota a S de productos $X\times Y$ y sumas $X+Y$ (en *Set* son los productos cartesianos y las uniones disjuntas respectivamente). Con los productos, fijando la segunda componente se obtiene un endofuntor $(-)\times X{:}S\to S$, al que se refiere el axioma siguiente.

Axioma S2. Existe el *objeto exponencial* Y^X para cada par de objetos. Este enunciado significa la existencia para cada objeto X de un funtor $(-)^X$ adjunto a derecha de $(-)\times X$, de modo que los morfismos $Z\to Y^X$ se corresponden biyectivamente con los $Z\times X\to Y$ de manera natural en Y y Z. En particular, los elementos de Y^X se corresponden con los morfismos $X\to Y$ debido al isomorfismo $X\cong 1\times X$. En *Set*, Y^X es el conjunto de las aplicaciones $X\to Y$ y cada $g{:}Z\to Y^X$ corresponde a $h{:}Z\times X\to Y$ con $\mathrm{h}(z,x)=g(z)(x)$.

[18] F. W. Lawvere, "The category of categories as a foundation of mathematics", en S. Eilenberg *et al*. (eds.), *Proc. of the conference on categorical algebra, La Jolla 1965*, New York, Springer, 1966, pp. 1-20.

Axioma S3. Existe un objeto **N** de números naturales. Se trata de una estructura $1\to\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ formada por un elemento *cero* $0{:}1\to\mathbf{N}$ y un endomorfismo *siguiente* $s{:}\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ que es inicial entre todas las del mismo tipo en S, lo que significa que las sucesiones $s{:}\mathbf{N}\to X$ se definen por recursión simple a partir de un primer elemento $x{:}1\to X$ y un morfismo de transición $h{:}\mathbf{N}\to X$.

El segundo bloque está formado por dos «axiomas especiales», llamados así porque son muy específicos de los conjuntos.

Axioma S4. Dados $f,g{:}X\to Y$, si $f\neq g$ existe un elemento $x{:}1\to X$ tal que $fx\neq fy$ (existe un elemento en X que da por composición elementos distintos en Y). Afirma por vía negada que dos morfismos son iguales si valen lo mismo en todos los elementos del dominio común, lo que se resume diciendo que el objeto final es un *generador* de la categoría S (denotando $x\in X$ los elementos resulta el simbolismo usual en *Set*)[19]. Sigue de este axioma que $X\cong 1$ si y solo si X tiene un único elemento.

Axioma S5. Dado $f{:}X\to Y$, si X tiene elementos entonces existe $g{:}Y\to X$ tal que $fgf=f$. Este axioma es la variante del *axioma de elección* escogida por Lawvere, cuya teoría elemental de S resulta ser muy dependiente de este axioma. Entre otras cosas, el axioma S5 completa el comportamiento esperado de los monomorfismos y los epimorfismos, por ejemplo, que todo epimorfismo es un morfismo suprayectivo en el sentido de los elementos (lo que requiere elección). En este punto, Lawvere supone que el dominio tiene elementos, pero un axioma posterior le permitirá eliminar este requisito provisional.

El último bloque de axiomas lo forman tres referidos a elementos.

Axioma S6. Cada objeto X no inicial tiene elementos.

Axioma S7. Cada elemento $1\to X+Y$ factoriza por una de las inclusiones.

Axioma S8. Existe un objeto con más de un elemento. Este axioma implica que 0 no tiene elementos.

Los tres axiomas del primer grupo sirven para disponer de unos primeros objetos 0, 1, **N** y obtener otros a partir de los ya dados, pero sin el axioma S8 los previos serían realmente poco productivos, pues la categoría *flecha* $0\to 1$ con dos objetos y un solo morfismo distinto de las dos identidades satisface los axiomas S1-7 (con $1=\mathbf{N}$), pero no el S8, así que este último es independiente de los que le preceden, además de decisivo. Con los ocho axiomas disponibles, Lawvere demuestra que el objeto **N** del axioma S3 verifica los postulados de Peano. Demuestra también otros teoremas que establecen en la categoría S

[19] Permite también afirmar que la definición de monomorfismo equivale a su mismo enunciado formulado solo con elementos, que es formalmente análogo a la noción habitual de aplicación inyectiva. Pero la noción categórica dual de epimorfismo no tiene una relación tan inmediata con la noción de «morfismo suprayectivo» formulada con elementos. Todo morfismo suprayectivo es epimorfismo por el axioma S4, pero el enunciado recíproco requiere el axioma siguiente.

construcciones básicas de la teoría de conjuntos, como por ejemplo la factorización canónica de un morfismo f=me con m monomorfismo y e epimorfismo.

La independencia del axioma S3 se constata con la subcategoría *Fin* que toma de *Set* solo los conjuntos finitos, y la del axioma S2 con la categoría *Num* de los conjuntos numerables. La categoría *Ord* formada por los conjuntos ordenados y las aplicaciones monótonas entre ellos prueba la independencia del axioma S5; también la categoría más amplia *pOrd* de los conjuntos preordenados (sin exigir la propiedad antisimétrica) verifica todos los axiomas menos S8.

Pronto se hizo habitual enunciar en categorías el axioma de elección de un modo diferente a S5 pero equivalente a él en *Set*: una categoría C verifica el *axioma de elección* si todo epimorfismo tiene una *sección*. Que un morfismo $p{:}X\to Y$ es epimorfismo significa que cada igualdad fp=gp implica f=g, y una sección de p es un morfismo $j{:}Y\to X$ tal que $pj=id_Y$, se dice entonces que p es una *retracción*. En cualquier categoría, toda retracción es un epimorfismo y el axioma de elección es precisamente el enunciado recíproco, que se puede dilucidar en una categoría cualquiera. En los fundamentos de la matemática referidos a *Set* es una cuestión a debate, más bien lo fue; hoy se admite generalmente el axioma de elección a los efectos del trabajo matemático común y hay otras categorías en las que poder trabajar sin axioma de elección. En un curso de teoría de categorías se puede plantear como ejercicio verificar si el axioma de elección es o no válido en cualquier categoría que se proponga.

Es buen momento para observar que, en cualquier categoría, los endomorfismos $X\to X$ de un objeto en él mismo forman monoide y que un monoide es una categoría con un único objeto y los elementos del monoide como morfismos. La acción (a derecha) de un monoide sobre un conjunto es particularmente visible en *Set* tomando el monoide $\mathrm{M}=\mathbf{N}^{\mathrm{N}}$ de las sucesiones de números naturales y el conjunto X^{N} de las sucesiones en otro conjunto cualquiera X, entonces la acción de M sobre X^{N} viene dada por la composición de sucesiones su, con $s\in X^{\mathrm{N}}$ y $u\in M$, que verifica las reglas de una acción sobre la identidad, $sid_{\mathrm{N}}=s$, y la composición, $s(uv)=(su)v$. Dado un monoide, la categoría de los conjuntos sobre los que el monoide actúa con las aplicaciones entre ellos que conservan la acción (equivariantes) verifica el axioma de elección si y solo si el monoide se reduce a la unidad, en cuyo caso la categoría es precisamente *Set*[20].

Como se aprecia con el ejemplo de las acciones de un monoide y a la vista del intenso uso que del axioma de elección hace Lawvere para demostrar propiedades de S, se trata de un axioma muy característico de categorías iguales o muy próximas a *Set*. Los epimorfismos p en *Set* son las aplicaciones

[20] Estas categorías aparecen con frecuencia en S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Sheaves in geometry and logic. A first introduction to topos theory*, New York, Springer, 1992. Véase también L. Español y L. Lambán, "On bornologies, locales and toposes of *M*-sets", en *J. Pure Appl. Algebra* 176 (2002) 113-125.

suprayectivas que determinan una descomposición de su dominio X en la unión disjunta de una familia de subconjuntos X_y formados, para cada $y \in Y$, por los elementos de X tales que $f(x)=y$, llamados *fibras* de p. Al afirmar la existencia de una sección de p, el axioma de elección sanciona que se puede hacer en un único acto una elección de un elemento en cada fibra para formar el conjunto imagen de la sección. En las categorías concretas de conjuntos con estructura y aplicaciones que la conservan, los morfismos que como aplicaciones son suprayectivas son siempre epimorfismos y tienen por tanto una sección conjuntista, pero en general esa sección no cumplirá las condiciones restrictivas de ser morfismo. Un sencillo contraejemplo prueba que ni *Ord* ni *pOrd* verifican el axioma de elección: considero el conjunto $2=\{0,1\}$ ordenado con la igualdad (muy poco significativa, pero es una relación de orden) y por otra parte el conjunto ordenado $2_<=\{0<1\}$ más estándar. Como ambos tienen los mismos elementos, la igualdad en el sentido $2 \to 2_<$ es una aplicación monótona y suprayectiva, luego es un epimorfismo, y si tuviera una sección tendría que ser la propia identidad actuando en sentido contrario, que no es monótona; luego no puede haber sección en *Ord* para ese epimorfismo. Tampoco *Top* verifica el axioma de elección, lo que se prueba de modo análogo utilizando la topología discreta o la indiscreta. La categoría *Top* fue axiomatizada por Schlomiuk[21] dando con axiomas elementales una categoría T que resulta equivalente a *Top* si se supone bicompleta. La axiomática de T determina en su interior los objetos discretos (correspondiente a los espacios con topología discreta) de modo que la subcategoría que forman es equivalente a la categoría S de Lawvere.

La potencia analizada desde las categorías y los funtores

Las biyecciones, los isomorfismos y las equivalencias presentes en la obra de Cantor son nociones que consideradas en toda su generalidad pasaron medio siglo después a formar parte de la esencia de la teoría de categorías; así que no puede resultar sorprendente que desde dicha teoría se puedan clarificar aspectos de las intuiciones de Cantor no bien comprendidos en su momento. Un caso digno de consideración es la relación entre los *Mengen* y los *Kardinalen* cantorianos tal como fue analizada por Lawvere (1994)[22]. Los *Mengen* que aparecieron en la obra de Cantor son los espacios reales con su topología y su orden, que ahora voy a suponer representados por las categorías

21 D. Schlomiuk, "An elementary theory of the category of topological spaces", en *Trans. Amer. Math. Soc*. 149 (1970) 259-278.

22 F. W. Lawvere, "Cohesive toposes and Cantor's 'lauter Einsen'", cit. El asunto ya había sido mencionado con menos desarrollo en .F W. Lawvere, "Categories of space and of quantity, en J. Echeverría *et al*. (eds.), *The space of mathematics. Philosophical, Epistemological, and Historical Explorations*, Berlin, W. de Gruyter, 1992, pp. 14-30. Usó en su explicación la categoría *Top* y las topología discreta e indiscreta.

Top y *pOrd*. Por su parte, los *Kardinalen* fueron los conjuntos de Zermelo recogidos en la categoría *Set*. El proceso de abstracción mediante el cual Cantor obtuvo los *Kardinalen* a partir de los *Mengen* se plasma en los funtores olvido *Top*→*Set* y *pOrd*→*Set*. Para lo que sigue podría utilizar cualquiera de los dos, mi preferencia es el preorden porque es una noción matemática más básica.

Denotando K:*pOrd*→*Set* el funtor olvido, resulta que el *Kardinal* de un *Menge* preordenado E es $K(E)=E^{=}$, que vive en la categoría *Set*; pero puede volver a *pOrd* utilizando los dos funtores adjuntos del funtor olvido y allí comparar los *Mengen* que resultan con E. El funtor adjunto a izquierda, *ind*:*Set*→*pOrd*, asocia a cada conjunto X el conjunto preordenado *indiscreto*, *ind*(X), que resulta de asignarle la igualdad como relación de orden, de modo que todo *Kardinal* es el olvido de su *Menge* preordenado indiscreto: K(*ind*(X)=X. La adjunción *ind*–|K significa que dar una aplicación monótona *ind*(X)→E equivale a dar una aplicación $X\to K(E)$; dicho de otro modo, toda aplicación $X\to K(E)$ en *Set* «se ve» como una aplicación monótona *ind*(X)→E en *pOrd*. Por tanto, el cardinal de cada conjunto preordenado E es equivalente al del conjunto preordenado indiscreto de su cardinal, es decir, en la categoría *Set* se tiene una biyección $K(E)\cong K$(*ind*($K(E)$)); pero E e *ind*($K(E)$) no son en general *Mengen* isomorfos en *pOrd*. En la dirección *ind*($K(E)$)→E la identidad siempre es monótona, lo que en general no es cierto en sentido contrario.

Algo análogo sucede con el funtor adjunto a derecha, *dis*:*Set*→*pOrd*, que asocia a cada conjunto X el conjunto preordenado *discreto*, *dis*(X), que resulta de asignarle la relación de preorden «caótica» en la que cada par de elementos está ordenado, de modo que también ahora K(*dis*(X)=X. La adjunción K–|*dis* significa que dar una aplicación monótona E→*dis*(X) equivale a dar una aplicación $K(E)\to X$; dicho de otro modo, toda aplicación $K(E)\to X$ en *Set* «se ve» como una monótona E→*dis*(X) en *pOrd*. Por tanto, el cardinal de cada conjunto preordenado E es equivalente al del conjunto ordenado discreto de su cardinal, es decir, en la categoría *Set* se tiene una biyección $K(E)\cong K$(*dis*($K(E)$)); pero E y *dis*($K(E)$) no son en general *Mengen* isomorfos en *pOrd*. Siempre es monótona la identidad E→*dis*($K(E)$), lo que en general no es cierto en sentido contrario.

En definitiva, en la categoría de los *Mengen* preordenados se tienen las "identidades" *ind*($K(E)$)→E→*dis*($K(E)$), ninguna de las cuales es isomorfismo en general, pero estos tres *Mengen*, el original y los «adjuntos», tienen el mismo cardinal. Se da la igualdad *ind*($K(E)$)=*dis*($K(E)$), en los casos ∅ y 1. Con terminología de Lawvere, la categoría de los *Kardinalen* se incrusta en la de los *Mengen* dándole la imagen de un «cilindro adjunto» con bases *ind* y *dis* que muestra una «unidad e identidad de opuestos» dialéctica. Los elementos $a\in E$ tienen entre sí la «cohesión» determinada por la relación de preorden, que pierden en *ind*($K(E)$), donde son dos a dos *distintos* porque el único caso de $a\leq b$ pasa a ser $a=b$. A su vez, los elementos de E son dos a dos *indistinguibles* en *dis*($K(E)$), porque allí la relación $a \leq b$ se da siempre. Ser elementos «distintos e indistinguibles» no es una contradicción inadmisible en los *Kardinalen*, como sancionó Zermelo con rigidez metafísica, sino una situación dialéctica explicada con las categorías y los funtores, cada una de las condiciones corresponde a uno de los dos *Mengen* adjuntos y en los *Kardinalen* quedan las «unidades puras».

Segunda parte: la libertad de Cantor

Cantor, la matemática libre y los conjuntos. El paraíso de Cantor

Cuando Cantor proclamó en 1883 que «la esencia de la matemática reside justamente en su libertad», reivindicó esta libertad con carácter general para la creación matemática y la practicó para extender los sistemas de números hacia los infinitos actuales sucesivos, frente a quienes rechazaban ir más allá del infinito potencial[23]. Dejó entonces escrito que los números «finitos o infinitos» tenían dos tipos de «realidad o existencia»: la «intrasubjetiva o inmanente» en cuanto «elaboraciones de nuestro entendimiento» y la «trascendente o transubjetiva» que les asignamos como «imagen de los hechos y relaciones del mundo exterior frente al intelecto». Opinaba Cantor que, en el «desarrollo de su material conceptual», la matemática solo debe atender a la realidad inmanente, por eso la «matemática pura» puede denominarse «matemática libre». Intenta tranquilizar a los temerosos de los peligros derivados de este hacer sin cortapisas («lo que les pasa a muchos», señala) afirmando, por una parte, que lo arbitrario tiene «un campo de acción extremadamente pequeño» a causa de la propia consistencia que las matemáticas exigen y, por otra, que puede ser abandonado con facilidad todo desarrollo que se aprecie «estéril o inútil».

No se olvida Cantor de citar a otros matemáticos del siglo XIX, de Gauss a su contemporáneo Poincaré, que ya usaron la libertad creadora para avanzar en matemática pura (álgebra, análisis y geometría) haciendo más potentes sus aplicaciones. La alusión de Cantor a los temerosos que ven en la libertad un peligro para la ciencia apuntaba a su adversario berlinés Kronecker, partidario de restringir la acción matemática a las construcciones finitas. Trae también a las mientes que Gauss guardó silencio sobre las geometrías no euclídeas por miedo a los «beocios», pero su discípulo Riemann ya estaba liberado de esta ligadura cuando elaboró en 1854 la noción abstracta de variedad n-dimensional[24]. Consideró una «magnitud múltiplemente extensa» provista

[23] Esa famosa afirmación está en el nº 5 (§8) de los artículos por entregas antes citados. El nº 5 se conoce también por su edición separada del mismo año en la editorial Teubner con el título *Fundamentos de una teoría general de variedades* (léase conjuntos).

[24] Me refiero a la lección de 1854 «Sobre las hipótesis en que se funda la geometría», publicada catorce años después, que citaré desde la versión en español en la obra bilingüe B. Riemann, *Riemanniana selecta*, edición y estudio introductorio a cargo de J. Ferreirós, Madrid, CSIC, 2000.

de una forma cuadrática diferencial como métrica local, noción general capaz de ofrecer a los físicos diferentes espacios geométricos con los que modelar la realidad observada en diversos grados de aproximación. Al inicio de su texto, Riemann dejó escrito, en relación con la geometría entendida como descripción de la realidad exterior, que

> los teoremas de la geometría no se pueden deducir de conceptos generales de magnitud, sino que aquellas propiedades por las cuales el espacio se diferencia de otras magnitudes triplemente extensas concebibles, solo pueden ser tomadas de la experiencia.

Los axiomas de Euclides son pues «hipótesis» con una gran probabilidad «dentro de los límites de la observación» y se debe «juzgar si es admisible extenderlos más allá de los límites de la observación, tanto en la dirección de lo inmensamente grande como en la de lo inmensamente pequeño»[25]. Dilucidar a fondo la «magnitud múltiplemente extensa» llevaba a Riemann a un terreno fronterizo entre la matemática y la filosofía, en el que se encontraba inseguro. Por este terreno se aventuró Cantor durante el último cuarto del siglo XIX, elaborando la teoría de conjuntos con un estilo intuitivo, previo a las exposiciones formalizadas que llegaron en las primeras décadas del siglo XX. En el artículo antes citado de 1878, Cantor señaló que la noción riemanniana de «magnitud múltiplemente extensa» debía precisarse con alguna exigencia de continuidad (al menos) para que la dimensión sea invariante.

Hilbert siguió muy atento la obra de Cantor y contribuyó decididamente a su promoción. La hipótesis del continuo fue el primero de los 23 problemas que Hilbert planteó en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París el año 1900[26]. En esa misma fecha publicó "Acerca del concepto de número", el artículo donde caracteriza el conjunto de los números reales de modo axiomático en paralelo a *Fundamentos de la geometría*, obra publicada el año anterior, procedimiento equivalente pero alternativo a los métodos aritméticos genéticos seguidos por Dedekind con las cortaduras y por Cantor con las sucesiones fundamentales. Hilbert argumenta que el conjunto de los números reales axiomáticamente definido es un conjunto consistente en el sentido de Cantor. La introducción axiomática de los números reales realizada por Hilbert formalizó plenamente el «principio de continuidad» con el que Cantor expresaba la correspondencia biunívoca entre números reales, cuya obtención genética

[25] La formulación de la geometría por parte de Riemann fue multidimensional finita, y con métricas euclídeas o no, lo que tuvo una confirmación espectacular cuando la relatividad se modeló con una variedad de Riemann de cuatro dimensiones y métrica no euclídea.

[26] Se resolvió ya en el marco de la teoría de Zermelo-Fraenkel en el sentido de la independencia de la negación de la hipótesis (K. Gödel, *The Consistency of the axiom of choice and the generalised continuum hipothesis with the axioms of set theory,* Princeton, NJ, Princeton University Press, 1940). y de la propia hipótesis (P. J. Cohen, *Set theory and the Continuum Hypothesis,* London, W.A. Benjamin, 1966).

estaba bien determinada por él, Dedekind y otros, y los puntos de la recta, cuya determinación rigurosa estuvo pendiente hasta los *Fundamentos* de Hilbert.

Después de mostrar el camino con la geometría, Hilbert promovió un programa de formalismo que pronto llegó a la teoría de conjuntos, puesta en modo axiomático por Zermelo[27] (1908), cuatro años después de demostrar que todo conjunto puede ser bien ordenado, algo que había dejado pendiente Cantor; lo hizo utilizando el axioma de elección en una de sus versiones equivalentes. Las objeciones constructivistas e intuicionistas a los fundamentos de las matemáticas que surgieron en la década siguiente contra el tercio excluso, el axioma de elección o las mismas definiciones por génesis aritmética de los números reales fueron severamente combatidas por Hilbert. En la conferencia «La nueva fundamentación de las matemáticas» de 1922 dedicó un drástico correctivo a las críticas de Brouwer y Weyl, a los que tildó de «golpistas», aunque llegó a una especie de pacto en el sentido de aceptar restricciones en la teoría de la demostración. Poco después, en otra conferencia homenaje a Weierstrass de 1925 publicada un año después, «Acerca del infinito», defendió que el infinito no existe en la realidad exterior pero sí en nuestro pensamiento, donde tiene una función conceptual imprescindible que Cantor había logrado desarrollar con éxito mediante los números transfinitos, a pesar de las críticas todavía persistentes, frente a las que vuelve a defender la capacidad de las matemáticas para evitar las paradojas. En este contexto apareció otra fase famosa: «Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros»[28].

La primera fase emblemática de Cantor sobre la libertad y esta que no lo es menos sobre el paraíso defendido parecen contradictorias, si hubo libertad para crear diversas geometrías y diversos infinitos también tendría que haberla para crear diversos paraísos; no hay que cerrar el paraíso de Cantor, pero se pueden abrir otros apelando con él a la libertad creadora y a la validación por contraste con la experiencia matemática, como se hizo en geometría. Los nuevos paraísos de conjuntos llegaron a la vez que la huella humana en la Luna, cuando los norteamericanos y sus socios se esforzaban por superar en la carrera espacial a los rusos dejando como efecto colateral un gran impulso a las matemáticas formalizadas.

La vía de acuerdo o síntesis entre formalismo y el intuicionismo progresó cuando Heyting convirtió la lógica intuicionista en una estructura algebraica igual de formalizada que el álgebra de Boole, que resultaba uno de sus casos particulares. A su vez, el énfasis puesto por Hilbert en la teoría de la

27 E. Zermelo, "Untersuchungen über die Grunlagen der Mengenlhere", *Math. Ann.* 65 (1908) 261-281.

28 Los textos citados de Hilbert están traducidos a lengua española en la compilación D. Hilbert, *Fundamentos de las matemáticas*, selección e introducción de C. Álvarez y L. F. Segura, trad. y notas L. F. Segura, México, Facultad de Ciencias UNAM, 1993, donde hay referencia a los originales. La frase del paraíso está en la p. 94.

deducción llevó a varias presentaciones axiomáticas equivalentes del cálculo de proposiciones clásico, en una de los cuales Klene propuso en 1952 un sistema con diez proposiciones primitivas tal que bastaba cambiar la última, $\neg\neg P \Rightarrow P$, por esta otra, $\neg P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$, para obtener una presentación axiomática de la lógica de proposiciones intuicionista. Una fuerte controversia ideológica quedaba reducida, en el plano de la lógica formal, a la mutación de un gen. El constructivismo intuicionista sin tercio excluso ni axioma de elección siguió su camino, ya sin tanta beligerancia, como una parcela de la matemática algo separada del pujante formalismo a la Bourbaki, siendo concebido de modo pragmático como un modo de desarrollo teórico más próximo al cálculo efectivo, dando por bueno que «demostrar constructivamente es demostrar más», mensaje que puede retrotraerse al propio Hilbert. Este punto de vista quedó reforzado con la proliferación de los ordenadores y la matemática computacional, que encuentra en la matemática intuicionista un referente teórico más próximo al cálculo efectivo que la matemática clásica[29]. Entretanto, también la teoría de categorías y funtores encontró aplicaciones a los estudios teóricos sobre computación.

Pluralidad de paraísos de conjuntos

Las categorías de haces de Grothendieck eran teorías de conjuntos intuicionistas candidatas a paraísos de Cantor, pero esto se supo después de que se hiciera de ellos un uso fructífero en aspectos concretos de las matemáticas.

Los haces sobre un espacio topológico base X eran aplicaciones $p{:}E\to X$ con la propiedad especial de «homeomorfismo local». Formaban una categoría derivada de *Top*, siendo los morfismos de p en $p'{:}E\to X$ aplicaciones continuas $f{:}E\to E'$ verificando $p'f=p$. Grothendieck cambió esta presentación por otra en la que un haz pasaba a ser un funtor con valores en *Set* y la categoría de haces una categoría de funtores y transformaciones naturales. El espacio base X tiene una topología $\theta(X)$ o conjunto de abiertos con la estructura reticular de álgebra de Heyting completa, que, como todo conjunto ordenado, puede considerarse como categoría tomando los abiertos como objetos y un único morfismo por cada inclusión $U\subseteq V$. Las identidades son las igualdades y la composición la propiedad transitiva del contenido. Con estos elementos, cada homeomorfismo local p puede ser descrito como un funtor que hace corresponder a cada abierto U el conjunto de las secciones continuas de p, las $s{:}U\to E$ que verifican $ps=id_U$. Si $U\subseteq V$, una sección sobre V se restringe a una sobre U,

[29] Puede seguirse este desarrollo en los libros generales pioneros de E. Bishop, *Foundation of constructive analysis*, New York, MacGraw-Hill, 1967, y de R. Mines, F. Richman y W. Ruitenburg, *A Course in Constructive Algebra*, Dordrecht, Springer, 1988, así como en H. Lombardi y C. Quitté, *Commutative algebra: Constructive methods*, Dordrecht,. Springer, 2021, que tuvo una primera edición en 2011.

con lo que se completa un funtor $P:\theta(X)^{op} \to Set$ que tiene la propiedad especial que se designa con el término *haz*: las secciones definidas sobre abiertos que coinciden allí donde los abiertos respectivos se cortan determinan una única sección global sobre el abierto unión. Una transformación natural entre haces es una familia de aplicaciones $\alpha_U:P(U) \to P'(U)$, una para cada abierto U de X, que forman al cambiar de abiertos $U \subseteq V$ cuadrados conmutativos con las respectivas restricciones. Lo visto en este ejemplo se formaliza en abstracto y se obtiene los *prehaces* como funtores $\theta(X)^{op} \to Set$ arbitrarios, que son haces si cumplen la compatiblidad con los cubrimientos (uniones de abiertos). Este fue el formato definitivo para los haces, que forman una categoría denotada $sh(X)$.

El paso siguiente de Grothendieck fue realizar una audaz generalización a prehaces $C^{op} \to Set$ definidos sobre una categoría arbitraria (excepto una restricción relativa a que sus objetos y morfismos formen conjuntos de *Set*) en la que introduce una noción llamada *topología de Grothendieck* que generaliza los cubrimientos con abiertos del caso simple antes visto, con posibilidad de definir muchas de ellas en cada categoría C; los haces son entonces los prehaces compatibles con la topología de Grothendieck considerada, denotada J, y la categoría de haces $sh(C,J)$ es el estándar de un topos de Grothendieck. Con esta compleja elaboración se obtuvieron notables resultados en topología algebraica y geometría algebraica, donde los haces eran apreciados como *conjuntos variables* sobre la categoría C con una ligadura impuesta por la topología J.

Quienes se dieron cuenta de que los topos de Grothendieck eran modelos de teoría de conjuntos intuicionista fueron Lawvere y Tierney en una investigación conjunta durante el curso 1969/70, en la que encontraron una axiomática subyacente a las dadas por Giraud para los topos de Grothendieck y por Lawvere para la categoría *Set*.

Surgieron así los *topos* como aquellas categorías E que verifican tres axiomas elementales (de primer orden): los dos primeros son los de Lawvere (límites y colímites finitos y exponenciación) T1=S1, T2=S2, y el tercero, el descubrimiento notable con el que afloró la lógica, fue T3: «existen morfismos característicos de los subobjetos». Esto significa la existencia de un objeto Ω que tiene un elemento $t:1 \to \Omega$ de modo que para cada monomorfismo $a:A \to X$ existe un único morfismo $\phi:X \to \Omega$ cuyo producto fibrado con t es a. Esta propiedad se expresa diciendo que Ω es el *clasificador de subobjetos* del topos, t el elemento *verdad* y el *morfismo característico* del monomorfismo a[30]. Monomorfismos con el mismo codominio X factorizados por un isomorfismo tendrán el mismo morfismo característico. El clasificador de subconjuntos en *Set* es

30 Ser producto fibrado quiere decir que ϕa factoriza a través del elemento t y si también lo hace ϕf para otro morfismo $f:Y \to X$ entonces existe un morfismo $g:Y \to A$ tal que $ag=f$ (que es único por ser a monomorfismo). Más propiamente, el clasificador sería el elemento $t:1 \to \Omega$, al que se denomina *verdad* por razones que aparecerán más adelante.

$\Omega=2=\{0,1\}$ con t:$1=\{0\}\to 2$, t(0)=1, pues dado un subconjunto $A\subseteq X$ existe una única aplicación ϕ:$X\to 2$ tal que $A=\{x\in X;\ \phi(x)=1\}$[31].

Lawvere expresó esta propiedad en el lenguaje de categorías proponiendo como *subobjeto* de un objeto X un monomorfismo a:$A\to X$, así que los elementos x:$1\to X$ son los subobjetos con dominio el objeto final 1, que pertenecen al subconjunto anterior si factoriza a través de él (por un elemento de), escribiendo entonces $x\in a$[32]. En particular, dados dos elementos, que uno pertenezca a otro significa su igualdad. Entre subobjetos de X se define el contenido $a\subseteq b$ mediante la existencia de un morfismo entre sus dominios que los factorice, que será único necesariamente. Usando los axiomas especiales de S, tal relación equivale al enunciado habitual en *Set*: para cada elemento $x\in X$, si $x\in a$ entonces $x\in b$.

Del axioma S1 sigue la existencia en S del objeto suma 2=1+1 con dos inclusiones (elementos) i_0,i_1:$1\to 2$, pero solo se puede concluir que 2 tiene al menos un elemento, las inclusiones podrían ser iguales o podría haber otros elementos. Las propiedades de 2 van surgiendo a medida que se incorporan axiomas a S. Usando el axioma de elección S5 junto con S1 y S4, Lawvere demostró que 2 es un cogenerador, del axioma S7 se sigue que tiene a lo sumo dos elementos y de S8 que las inclusiones son distintas, así que 2 tiene exactamente dos elementos.

La demostración que se da habitualmente en *Set* de que 2 es cogenerador no utiliza elección porque recurre a las funciones características, pero en el proceso paulatino de Lawvere falta un cierto recorrido por la teoría axiomática de S para llegar a establecer que 2 clasifica subconjuntos. Lawvere define el morfismo característico ϕ:$X\to 2$ de un subobjeto a:$A\to X$ de S mediante la propiedad de producto fibrado solo para elementos de X, y para extenderla a morfismos arbitrarios con codominio X necesita demostrar antes la existencia de un complementario para cada subobjeto (los subobjetos de X forman un álgebra de Boole. La laboriosa demostración de este teorema usa exponenciación (S2), elección (S5) y factorización de elementos en las sumas (S7).

A partir de los tres axiomas, en el topos E surgía una «teoría de conjuntos» con lógica intuicionista que se manifestaba en que el retículo de subobjetos de cada objeto era un álgebra de Heyting en correspondencia con la estructura de álgebra de Heyting interna (las operaciones escritas como morfismos con diagramas conmutativos adecuados) de Ω, que se convierte en el objeto de los valores de verdad de las proposiciones. En *Set* es 2={0,1}con 0 representando *falso* y 1 *verdadero*). En todo topos E el objeto 2=1+1 es un álgebra de Boole

31 La comprobación de que los topos de Grothendieck verifican el axioma T3 fue realizada por Lawvere y Tierney identificando las topologías de Grothendieck que los definen a partir de los prehaces como morfismos j:$\Omega\to\Omega$ con ciertas propiedades.

32 Es más habitual llamar subobjeto a una clase de equivalencia de monomorfismos vinculados por un isomorfismo entre sus dominios.

interna y hay un monomorfismo $2 \rightarrow \Omega$ que no es isomorfismo en general, cuando esto sucede se dice que el topos es *booleano*.

Lawvere presentó los topos en sociedad el año 1970 durante el Congreso Internacional de Matemáticos de Niza, precisamente cuando Grothendieck abandonó la investigación en matemáticas por motivos ideológicos. No le faltó porte ideológico a la intervención de Lawvere en Niza, bajo el título «Cuantificadores y haces», enfocada desde el materialismo dialéctico[33]. También Tierney[34] dio protagonismo a los haces titulando «Teoría de haces y la hipótesis del continuo» a un artículo en el que examinaba desde los topos el resultado de independencia de Cohen y «Teoría axiomática de haces» su curso de 1971, publicado dos años después. Una nutrida cohorte de matemáticos jóvenes desarrolló intensamente en pocos años la teoría de topos hasta donde puede verse en la monografía pionera del inglés Johnstone[35], cuyo borrador ya circulaba dos años antes[36]. Varios autores se ocuparon de los aspectos lógicos de los topos desarrollando el lenguaje de teoría de conjuntos que se puede interpretar en ellos con lógica intuicionista, fue muy decisiva en este aspecto la intervención del canadiense Joyal[37].

Vuelta a los conjuntos de Cantor desde los topos

Una vez que los topos estaban disponibles como modelos de teoría intuicionista de conjuntos, varios caminos de indagación se abrieron a los matemáticos que a ello se dedicaron, sin olvidar que otros veían con displicencia estas incursiones por paraísos diferentes del paradigmático de Cantor-Hilbert. Terminaré con unas pinceladas sobre alguno de estos desarrollos, como el papel del axioma de elección, los sistemas de números y resultados de la matemática intuicionista[38].

33 Véase F. W. Lawvere, "Quantifiers and sheaves", en S. Eilenberg *et al*. (eds.), *Actes du Congrès International des Mathématiciens, Nice 1970*, Paris, Gauthier-Villars 1971, Tome I, 329–334. El vínculo con el materialismo fue glosado por G. C. Meloni, "Teoria delle categorie, fundamenti della matematica e materialismo dialettico", en C. Mangione (ed.) *Scienza e filosofia. Saggi in onore di Ludovico Geymonat*, Milano, Garzanti, 1985, 241-269.

34 M. Tierney, "Axiomatic sheaf theory: some constructions and applications", en *Proc. CIME conference on categories and commutative algebra, Varenna 1971*, Edizione Cremonese 1973, 249-326.

35 Peter T. Johnstone, *Topos theory*, London, Academic Press, 1977.

36 También apareció R. Goldblat, *Topoi. The categorical analysis de la logic*, Amsterdam, North-Holland, 1977, libro más sencillo que el de Johnston dirigido a lógicos.

37 A. Joyal, A. Boileau, "La logique des topos", en *J. Symb. Logic* 46 (1981) 6-16.

38 Un propuesta innovadora sobre los fundamentos matemáticos de la mecánica de medios continuos que había formulado Lawvere en los años sesenta tuvo un notable desarrollo en el marco de los topos con el nombre de *geometría diferencial sintética*, del que me ocupé en L. Español, "La dialéctica del Cálculo infinitesimal", en *Llull* 27 (2004) 357-399. Una de las referencias allí dadas tiene ahora una segunda edición mejorada: A. Kock, *Synthetic differential geometry*, 2nd. ed., Cambridge, Cambridge University Press, 2006, y apareció una nueva: M.

Aparecidos los topos, era natural disponer de una segunda lista de axiomas elementales para *S* equivalente a la S1-8 dada por Lawvere en 1964 y que empezara afirmando que *S* es un topos[39]. Esto se llevó a cabo por diversas vías, voy a comentar dos, la primera llega a *S* añadiendo axiomas a un topos *E*, la segunda llega a *Set* partiendo de un topos de Grothendieck *G*.

El axioma de elección en la forma S4 había intervenido a fondo en el desarrollo axiomático de la teoría de conjuntos realizado por Lawvere, así que de inmediato se intentó comprender su encaje en la teoría de topos, en la que buena parte de la teoría de conjuntos surgía sin necesidad de dicho axioma. El resultado llegó pronto de la mano de un discípulo de Tierney, Diaconescu[40], quien demostró que si un topos verifica el axioma de elección (todo epimorfismo tiene una sección) entonces es booleano, así que en los topos el tercio excluso es consecuencia del axioma de elección[41]. El recíproco del resultado previo no es cierto, hay topos booleanos sin axioma de elección, por ejemplo el de los conjuntos sobre los que actúa un grupo[42].

En los axiomas de topos no aparece el axioma S3 de Lawvere sobre el objeto de números naturales, pero todos los topos de Grothendieck lo verifican. Una vez supuesto que un topos verifica este axioma, se pueden construir en él los objetos de números enteros, racionales, reales y complejos. Una aproximación natural a *S* afirmará que es un topos con objeto de números naturales y axioma de elección. Para terminar la aproximación se introduce como axioma que el clasificador Ω tiene exactamente dos elementos (topos *bivaluado*). Siempre tiene dos como reflejo de las dos inclusiones en 2=1+1 y del monomorfismo $2 \to \Omega$, uno de ellos es el elemento verdad $t:1 \to \Omega$ (que corresponde a la inclusión i_1, el otro corresponde a i_0 representando el valor *falso*), así que lo que el axioma reclama es que existen estos dos y ninguno más, que la lógica del topos tenga exactamente dos valores de verdad. Se completa así un sistema de axiomas equivalente al S1-8 de 1964.

Otra aproximación interesante es la que pretende caracterizar *Set* entre los topos de Grothendieck *G*. Una vez establecida la categoría axiomática de conjuntos *S*, Lawvere tomaba el funtor de los elementos, $\Gamma:S \to Set$ determinado por ser $\Gamma(X)$ el conjunto de los elementos del objeto *X*. En sentido contrario,

Bunge, F. Gago, A M. San Luis, *Synthetic differential topology*, Cambridge, Cambridge University Press, 2018.

39 El libro de F. W. Lawvere & R. Rosebrugh, *Sets for matematics,* Cambridge, Cambridge University Press, 2003 expone dicha lista de manera didáctica.

40 R. Diaconescu, "Axiom of choice and complementation", en *Proc. Amer. Math. Soc*. 51 (1975) 176-178.

41 El enunciado del axioma de elección se puede debilitar manteniendo el tercio excluso como consecuencia, pero no entraré en este nivel de detalle.

42 Más general: todas las categorías de funtores $C \to Set$ con *C* con una categoría en la que todos los morfismos son isomorfismos (*grupoide*).

suponiendo S bicompleta podía definir el funtor $\Delta{:}Set\to S$ siendo $\Delta(Z)$ la suma de tantas copias del objeto final como elementos tiene el conjunto Z; luego demostraba que ambos funtores determinan una equivalencia de categorías. Unos funtores análogos se pueden definir para un topos de Grothendieck G, que siempre es una categoría bicompleta. Resulta así una adjunción $\Delta\dashv\Gamma$ en la que el adjunto a izquierda conserva límites finitos. que se convierte en equivalencia si el haz final 1 de G es generador y tiene exactamente dos subobjetos.

Que el objeto final sea generador es un hecho bastante característico de *Set*, más que el ser bivaluado. Recordando un ejemplo anterior con sucesiones, tomemos el topos M de los conjuntos sobre los que actúa a derecha el monoide $M=\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, en el que están todos los subconjuntos $S\subseteq X^{\mathbf{N}}$ compatibles con la acción, en el sentido de que toda subsucesión de una que está en S pertenece también a S, es decir (en el sentido de la teoría de conjuntos ordinaria), $su\in S$ siempre que $s\in S$ *y* $u\in M$. Cada sucesión $s\in S$ está completamente determinada por la aplicación equivariante $M\to S$ que envía la identidad en s, pues el morfismo está obligado a llevar cada $u\in M$ a su. Por otra parte, sobre el conjunto final 1 actúa el monoide de una manera obviamente constante, de modo que es también objeto final en el topos M y los elementos (ahora en el sentido de las categorías) $1\to S$ determinan exactamente sucesiones *constantes*, aquellas que no cambian por la acción del monoide. Las constantes también están determinadas por el monoide, son el caso especial en el que hay una factorización $M\to 1\to S$. En este topos, el objeto final 1 no es un generador, papel que le corresponde al monoide M: dos morfismos $S\to E$ que coincidan al componer con todos los $M\to S$ serán iguales, si solo coinciden al componer sobre los elementos $1\to S$ solo lo hacen sobre las constantes, no sobre el total de S. El propio monoide M, objeto distinguido del topos M, tiene el subconjunto C de las constantes c_n, $n\in\mathbf{N}$, siendo el valor $u(n)$ en n de la sucesión $u\in M$ el correspondiente a una composición $uc_n=c_{u(n)}$.

Es oportuno recordar aquí ese pasaje de Cantor que afirmaba, usando una imagen geométrica, la posibilidad de tener conjuntos con elementos de diversa naturaleza, de los que unos serán *puntos* y otros *figuras* formadas por puntos. En el ejemplo previo, S tiene dos tipos de elementos, las sucesiones o figuras en general y las constantes o puntos. El funtor $\Gamma{:}M\to Set$ que asigna a cada objeto el conjunto $\Gamma(S)$ de sus puntos es un tipo de cardinal restringido que no considera todas las sucesiones/figuras sino solo las constantes/puntos. Este funtor tiene dos adjuntos, uno a izquierda $\Delta{:}Set\to M$, con $\Delta(X)$ el conjunto X sobre el que el monoide M actúa de manera trivial dejando constantes todos los elementos, $\Gamma(\Delta(X))=X$, y otro a derecha $\wedge{:}Set\to M$ que asocia a cada conjunto X el conjunto de todas sus sucesiones, $\wedge(X)=X^{\mathbf{N}}$. Con estas adjunciones se puede repetir argumentos similares a los que superaron en modo dialéctico la contradicción zermeliana entre los *Mengen* y los *Kardinales*. El *Menge S* da lugar al *Kardinal* parcial $\Gamma(S)$, referido solo a puntos, y este a su vez se desglosa en dos

Mengen que enmarcan al original en la forma $\Delta(\Gamma(S)) \to S \to \wedge(\Gamma(S))$, en el primero están todos los puntos de S y en el segundo todas las sucesiones que se pueden formar con sus puntos. Por tratarse de un cardinal parcial, la situación es algo más compleja que la mostrada en la primera parte de este ensayo con el funtor olvido de los conjuntos preordenados, las flechas que ligan a S con sus asociados por las adjunciones no son identidades, la primera es una inclusión y la segunda $S \to \Gamma(S)^{\mathbf{N}}$ puede ser monomorfismo o no. Tomando como *Menge* el propio monoide, con cardinal C, es $\Delta(C) \to M \to C^{\mathbf{N}}$, siendo la flecha de la derecha un isomorfismo por ser $C \cong \mathbf{N}$. Esta vez con un topos y algo más de complejidad, pero de nuevo una intuición difusa de Cantor puede ser interpretada con precisión y buen sentido en un marco de categorías.

El propio topos M sirve para ilustrar el aspecto lógico que acompaña a estas categorías. Dada una sucesión $s{:}\mathbf{N} \to X$, para evaluar si pertenece al subobjeto $S \subseteq X^{\mathbf{N}}$ se puede adoptar la actitud conjuntista tradicional del tercio excluso, pertenece o no pertenece, o bien hacer una evaluación más sutil considerando un valor de verdad variable, que aprecie la cantidad de subsucesiones de s que estén en S. Se puede pues estimar como valor de verdad $<s \in S>=\{u \in M; su \in S\}$, que toma el valor máximo M cuando u está en S al modo clásico y el valor mínimo, el subconjunto vacío de M, cuando, de nuevo en el sentido clásico, ninguna subsucesión de s pertenece a S; en medio hay toda una gama de valores de verdad que refinan la mera negación de la pertenencia clásica y son subobjetos de M (subconjuntos compatibles con la acción), los llamados *ideales*. Todos los ideales $I \subseteq M$ forman un conjunto denotado Ω, ordenado por inclusión con mínimo $\varnothing$ y máximo M, que son los valores de verdad posibles cuando s es una constante. La intersección y la unión de ideales es de nuevo un ideal y con estas operaciones Ω es un álgebra de Heyting completa, con implicación y negación: $I \Rightarrow J=\{u \in M; <u \in I> \subseteq <u \in I>\}$, luego $\neg I = I \Rightarrow \varnothing = \{u \in M; <u \in I> = \varnothing\}$

El conjunto Ω es un objeto del topos M si se considera que $<u \in I> \in \Omega$ es la acción de $u \in M$ sobre el ideal $I \in \Omega$. Además, las operaciones con ideales son morfismos (equivariantes), de modo que Ω es un álgebra de Heyting interna en el topos M. Hay multitud de ideales, las figuras de Ω, pero Ω solo tiene dos puntos $1 \to \Omega$ porque solo los ideales extremos $\varnothing$ y M y son constantes para la esta acción $<u \in I>$. Corresponde a M el punto *verdad* $t{:}1 \to \Omega$ y a $\varnothing$ el punto *falso* $\neg t{:}1 \to \Omega$, de modo que M resulta ser un topos bivaluado bien diferente de *Set*. Ω es el clasificador de subobjetos de M, pues cada subobjeto $S \subseteq X^{\mathbf{N}}$ tiene el morfismo característico ϕ: $X^{\mathbf{N}} \to \Omega$ dado por $\phi(s)=<s \in S>$. Aunque como ejemplos muestro objetos de sucesiones concretas $S \subseteq X^{\mathbf{N}}$, en el topos M hay otros objetos que no responden a este formato, como por ejemplo el propio *Menge* Ω, cuyo *Kardinal* de puntos es $\Gamma(\Omega)=2$ y para el que el diagrama de *Mengen* adjuntos es $2 \to \Omega \to 2^{\mathbf{N}}$, la primera (con $\Delta(2)=2=1+1$ 3n 3l topos) aplicación inyectiva con imagen $\{\varnothing, M\}$ y la segunda supryaectiva (que hace corresponder a cada ideal I la función característica del subconjunto $A=\{n \in \mathbf{N}; c_n \in I\} \subseteq \mathbf{N}$, pero ninguna de las dos isomorfismo.

Números reales en topos

La génesis aritmética de los números realizada en el siglo XIX alcanza también una claridad notable en los topos. Si un topos E verifica el axioma de existencia del objeto $\mathbf{N}$ de números naturales tal como lo definió Lawvere en 1964, la teoría de conjuntos propia del topos lleva sin dificultad a generar los objetos numéricos $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{Q}$ de los enteros y los racionales. Pasar a los reales es más difícil por la complejidad de las fórmulas lógicas involucradas, pero con más trabajo son posibles tanto la construcción del objeto de los reales de Cantor por sucesiones fundamentales, que denotaré $\mathbf{R}_C$, como del objeto de los reales $\mathbf{R}_D$, de Dedekind por cortaduras. He usado notaciones diferenciadas porque en general los resultados son diferentes, siendo $\mathbf{R}_C$ un subobjeto de $\mathbf{R}_D$ y este último el que presenta mejores propiedades, lo que otorga cierta superioridad al método genético de Dedekind.

En *Set* ambos conjuntos están en biyección, pero el paso de $\mathbf{R}_D$ a $\mathbf{R}_C$ necesita el axioma de elección. En los topos $sh(X)$ de haces sobre un espacio topológico X, para cada abierto $U \subseteq X$ resulta ser $\mathbf{R}_C(U)$ el conjunto de las aplicaciones $U \to \mathbf{R}$ localmente constantes (suponiendo en X una condición topológica algo más débil que ser localmente conexo), mientras que $\mathbf{R}_D(U)$ es, sin condiciones sobre el espacio X, el conjunto de las aplicaciones continuas, lo que hace que ambos objetos de reales sean distintos en general.[43]Los topos proporcionan modelos de teorías de conjuntos intuicionistas en las que la génesis aritmética de los números reales conduce a resultados distintos en ausencia del axioma de elección.

Otro hecho notable es que en ciertos topos el objeto $\mathbf{R}_D$ es un espacio bien conocido de las matemáticas, para cuyo estudio se pueden utilizar los topos pertinentes. En el llamado *topos topológico* de Johnstone el objeto de los reales de Dedekind va asociado el espacio de las sucesiones convergentes de números reales y en el *topos bornológic*o introducido por Lawvere el mismo objeto real resulta ser el espacio de las sucesiones acotadas de números reales. Esto significa que se puede desarrollar aspectos del análisis funcional en estos topos u otros similares[44].

A la hora de determinar la estructura algebraica de $\mathbf{R}_D$ es necesario precisar la noción de cuerpo y el comportamiento de la igualdad, como se hace en álgebra constructiva, y los topos proporcionan ejemplos que prueban en su caso la independencia de estas nociones. Hay tres nociones que con lógica clásica son equivalentes, pero en la lógica intuicionista no lo son. La noción de cuerpo

[43] M. P. Fourman, "Comparaison des réelesd'un topos; structures lisses sur un topos élémental", en *Cahiers top. et géom.diff*. 16 (1976) 233-239, y L. N. Stout, "Topological properties of the real number object in a topos", en *Cahiers top. et géom.diff*. 17 (1976) 295-326 hicieron estudios tempranos de estos objetos y de otros similares en topos. El primero dio una condición sobre para que $\mathbf{R}_D$ y $\mathbf{R}_C$ coincidan.

[44] Los trabajos de L. Español y L. Lambán, "A tensor-hom adjunction in a topos related to vector topologies and bornologies", en *J. Pure Appl. Algebra* 154 (2000) 143-158 y "On bornologies, locales and toposes of *M*-sets", cit. fueron en esa dirección.

más potente es el llamado cuerpo *geométrico*, en el que se verifica la fórmula «x es unidad o igual a 0»; más débiles que la anterior son las nociones de cuerpo *de fracciones* (« distinto de 0 implica unidad») y de cuerpo *residual* (« no unidad implica x igual a 0»), que son independientes entre sí, como se prueba verificándolo en topos debidamente elegidos. Si un cuerpo residual verifica «x es unidad o x no es unidad» (decidible respecto a las unidades) entonces es geométrico. Si un cuerpo de fracciones verifica «x igual a 0 o x distinto de 0» (decidible respecto a la igualdad) entonces es geométrico. En todos los topos, $\mathbf{R}_D$ es al menos un cuerpo residual.

En topos determinados, $\mathbf{R}_D$ puede tener alguna propiedad sorprendente desde el punto de vista clásico. Un caso muy significativo, debido a Mac Lane y Moerdijk, tiene que ver con esta afirmación combativa de Brouwer «todas las aplicaciones reales sobre el intervalo unidad [0,1] son continuas», basada en sus dificultades para manejar las sucesiones fundamentales de modo constructivo y en su severa exigencia para que una aplicación esté bien definida. La afirmación de Brouwer se expresa simbólicamente en fórmulas con cuantificadores en la lógica de primer orden de los topos y tan claro está que es falsa en *Set* como que existe un topos de Grothendieck con un objeto de números reales de Dedekind $\mathbf{R}_D$ tal que todas las funciones $\mathbf{R}_D \to \mathbf{R}_D$ son continuas en dicho topos según la interpretación de dichas fórmulas Este hecho tiene quizá poco valor como resultado matemático disponible para aplicaciones, pero pone de manifiesto que algunas intuiciones matemáticas con difícil encaje en el paraíso de Cantor encuentran otro paraíso consistente en el que manifestarse como verdaderas[45].

Matemáticas intuicionistas y matemáticas clásicas.

Una última cuestión que quiero considerar solo de modo sucinto es la posibilidad de comparar demostraciones clásicas e intuicionistas a través de los topos. Me limitaré a unos pocos casos concretos que llamaron la atención en los primeros años de la teoría de topos, cuando estos resultados resultaron llamativos; además, por ser los primeros no fueron demasiado sofisticados y se explican con cierta facilidad. Hay que considerar, por una parte, que un teorema demostrado con lógica intuicionista es susceptible de ser interpretado en cada topos, por tanto, cuando se dan pruebas intuicionistas de algunos teoremas clásicos se abre la posibilidad de encontrar nuevos teoremas interpretándolos en topos diversos.

[45] Estas cuestiones sobre reales y otras similares está incorporadas a obras como P.T. Johnstone, *op. cit.* o S. Mac Lane & I. Moerdijk, *op. cit.*

El primer ejemplo, que resultó muy celebrado, fue dado por Mulvey[46]. Este entonces joven matemático inglés demostró constructivamente el teorema clásico de Kaplanky que afirma que un módulo proyectivo finitamente engendrado sobre un anillo local admite una base finita. Luego interpretó este teorema en algunos topos espaciales de haces $sh(X)$ para ver los enunciados que obtenía. En uno de ellos resultó un teorema de Swan de aspecto bien diferente: Para cada espacio topológico compacto, la categoría de los fibrados vectoriales reales de dimensión finita sobre X es equivalente a la categoría de los $C(X)$-módulos proyectivos finitamente engendrado[47]. No consiguió resultados significativos novedosos, pero encontró una conexión entre teoremas de aspecto bien diferente motivada por una variación en la lógica.

Por su parte, Rousseau[48] demostró constructivamente al modo de Bishop los teoremas de división y de preparación de Weierstrass para funciones de variable compleja en una variable. Al interpretarlos en el topos espacial $sh(\mathbf{C}^n)$, donde $\mathbf{C}$ es el conjunto de los números complejos, obtuvo los mismos teoremas para varias variables. Verificó, además, que las dificultades para demostrar clásicamente el teorema de varias variables eran sensiblemente las mismas que las que ofrecía la prueba constructiva en el caso de una variable, siendo ambas demostraciones más difíciles que la clásica para una variable.

Terminaré con un ejemplo de mi propia investigación años atrás sobre álgebra intuicionista en topos, inspirado por el matemático canadiense André Joyal. Una vez que demostré que tiene dimensión de Krull igual a 1 el anillo de polinomios $K[x]$ con coeficientes en un cuerpo geométrico K, quería obtener el mismo resultado para el caso más general de un anillo regular R. Tal anillo tiene un álgebra de Boole B de elementos idempotentes y se puede representar R en el topos $sh(B)$ de los haces sobre B con los cubrimientos finitos, de modo que resulta un cuerpo geométrico R^* en dicho topos, al que se puede aplicar el teorema ya demostrado en álgebra intuicionista, que vale en todos los topos; el resultado fue que es igual a 1 la dimensión de Krull del anillo de polinomios $R[x]$ con coeficientes en un anillo regular.

El trabajo con teorías matemáticas concretas se realiza principalmente con topos de Grothendieck. La variedad de ellos y de funtores adjuntos que los conectan con diversas propiedades de conservación de las teorías tipificadas

[46] C. J. Mulvey, "Intuitionistic algebra and representation of rings", en *Memoirs A.M.S.* 148 (1974) 3-57.

[47] Aquí $C(X)$ es el anillo de las funciones reales continuas con dominio el espacio topológico X.

[48] C. Rousseau, "Topos theory and complex analysis", en M. P. Fourman *et al*. (eds.) *Applications of sheaves*, LNM 753 (1979), 623-659.

según su estructura y lógica, ofrece posibilidades para realizar transferencias de teoremas de unos topos a otros, con resultados muy generales sobre estos procesos[49]. Pero no está muy extendido el recurso a estas oportunidades por la comunidad matemática en general.

Luis Español González
Departamento de Matemáticas y Computación
Universidad de La Rioja
Edificio CCT
Madre de Dios, 53
26006 Logroño, La Rioja
luis.espanol@unirioja.es

49 Véase O. Caramello, *Theories, sites, topos. Relating and studying mathematical theories through topos-theoretic 'bridges'*, Oxford, Oxford University Press, 2018.