MULTIMODALIDAD LINGÜÍSTICA Y COMPRENSIÓN EN MATEMÁTICAS

LINGUISTIC MULTIMODALITY AND UNDERSTANDING IN MATHEMATICS

Jesús Alcolea Banegas
Universitat de València

Resumen*: Como en cualquier otra actividad humana y desde un punto de vista semiótico multimodal, en matemáticas sus practicantes recurren a diversos instrumentos que de alguna manera están relacionados con las diferentes virtudes epistémicas que valoran en su trabajo, entre las que destaca la comprensión. Nuestro objetivo es doble: primero, abordar los requisitos de dicha semiótica y, segundo, analizar las opiniones de algunos matemáticos sobre el problema de la comprensión, intentando explicar su papel, posibilidad y necesidad en matemáticas.*

Palabras clave*: filosofía de la práctica matemática, semiótica multimodal, epistemología, comprensión, demostración.*

Abstract*: As in any other human activity and from a multimodal semiotic point of view, those who practice mathematics draw upon various instruments that are somehow related to the different epistemic virtues that they value in their work, among which comprehension stands out. Our objective is twofold: first, to address the requirements of that semiotics and, second, to analyze the opinions of some mathematicians on the problem of understanding, trying to explain its role, possibility and necessity in mathematics.*

Keywords*: philosophy of mathematical practice, multimodal semiotic, epistemology, understanding, proof.*

1. Introducción: la filosofía de la práctica matemática

La moderna filosofía de las matemáticas puede parecernos a veces bastante sorprendente. A finales del siglo XIX y principios del XX, las fronteras entre la filosofía y las matemáticas eran porosas. Matemáticos tan influyentes como Poincaré, Hilbert o Brouwer escribieron sobre temas filosóficos relacionados con las matemáticas, y filósofos como Russell, Wittgenstein o Quine reflexionaron provechosamente sobre las matemáticas contemporáneas. A veces sucedía que los temas que interesaban a los filósofos de las matemáticas eran una continuación de los desarrollos de las matemáticas propiamente dichas. Al respecto, cabría citar el problema del rigor en el análisis en el siglo XIX, el descubrimiento de las paradojas de la teoría de conjuntos, los teoremas de incompletitud de Gödel o el programa de Bourbaki para sistematizar las matemáticas en su conjunto.

Sin embargo, todo parece indicar que, en los últimos años, las matemáticas y la filosofía de las matemáticas se han distanciado de alguna manera. Los temas que más preocupan a los filósofos de las matemáticas –el realismo y el antirrealismo, el estructuralismo y sus variedades, los argumentos sobre la indispensabilidad de las matemáticas para la ciencia, etc.– no parecen conectar con lo que habitualmente interesa a los matemáticos en ejercicio. Ello puede explicarse porque la filosofía de las matemáticas tiende a relacionarse con otras áreas de la filosofía, con la metafísica, la epistemología o la filosofía del lenguaje, en particular, y los problemas que se plantean suelen ser de naturaleza puramente filosófica. Además, las matemáticas que se necesitan para abordar estos problemas suelen ser bastante simples y, en muchos casos, la reflexión sobre la aritmética y la geometría elementales basta para satisfacer los intereses de los filósofos.

Ahora bien, como es bien sabido, algunos filósofos han trabajado en temas matemáticos más o menos convencionales, es decir, se han centrado más en la *práctica matemática*, y, a veces, como ha sucedido con Lakatos y Kitcher, su obra ha sido bien recibida por la comunidad filosófica que, como es obvio, tiene intereses filosóficos y espera que los frutos de su trabajo sean valorados desde un punto de vista filosófico. En esta línea, un logro importante ha sido la colección editada por Mancosu, *La filosofía de la práctica matemática* (2008)[1]. Los autores de los ensayos recogidos en ella comparten una visión de la filosofía de las matemáticas que presta atención de forma simultánea a la historia y a la práctica de los matemáticos activos y a la necesidad de conseguir que esa historia y esa práctica sean filosóficamente relevantes. En este sentido, esos autores "creen que la epistemología de las matemáticas debe extenderse mucho más allá de sus límites actuales para abordar cuestiones epistemológicas

[1] Paolo Mancosu (ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford, Oxford University Press, 2008.

que tienen que ver con la fecundidad, la evidencia, la visualización, el razonamiento diagramático, la comprensión, la explicación y otros aspectos"[2] de esa epistemología que pueden estar más o menos relacionados con el problema del acceso a los objetos abstractos típicos de las matemáticas. Pero sus contribuciones tienen varias características distintivas:

(a) Abordan problemas que ha recibido poca atención en la literatura filosófica reciente. Por ejemplo, la idea de que unas demostraciones son más explicativas que otras; o el papel de la representación visual, en general, en matemáticas, o de visualización, en particular, en el razonamiento. En este sentido, el principal objetivo de Giaquinto fue mostrar que, en tanto que tienen un contenido conceptual, las representaciones visuales poseen valor epistémico, sobre todo en el descubrimiento de nuevos resultados geométricos y aritméticos. Giaquinto explicó que "la experiencia visual sirve simplemente para desencadenar ciertas disposiciones de formación de creencias"[3], y cuando estas disposiciones son fiables, las creencias resultantes son conocimiento. Giaquinto entiende, además, que la manipulación de símbolos algebraicos es un ejemplo de razonamiento visual y extiende esta idea argumentando que el razonamiento algebraico y el geométrico difieren menos de lo que lo harían las explicaciones tradicionales, a la luz del papel esencial que el pensamiento visual desempeña en ambos, pensamiento que es muy "fructífero a nivel de descubrimiento"[4].

(b) Cuentan con ámbitos más extensos de la práctica matemática de lo que había sido frecuente en contextos filosóficos: no solo la lógica y la aritmética, sino también la teoría de categorías, el análisis complejo, la geometría algebraica o la teoría de números, ámbitos que ya habían sido abordados incluso por los mismos autores que han contribuido a la colección.

(c) Destacan la relevancia de esta forma de ver y abordar las matemáticas, no sólo para los nuevos temas o los futuros, sino también para los más clásicos. En este sentido, podríamos decir que las nuevas tendencias, lejos de oponerse a las tradicionales, resultan complementarias[5]. Así, las preguntas filosóficas relacionadas con la práctica matemática, la evolución de las teorías matemáticas, la representación visual, la explicación o la comprensión matemática recuperan el interés del pasado al relacionarse con temas más tradicionales, al desarrollarse y al expandirse. Al fin y al cabo, la filosofía no es otra cosa que una continua interrogación por todo cuanto llama nuestra atención en un afán por comprender.

[2] *Ibíd.*, pp. 1-2.

[3] Marcus Giaquinto, *Visual Thinking in Mathematics. An Epistemological Study*, Oxford, Oxford University Pres, 2007, p. 44.

[4] *Ibíd.*, p. 265.

[5] Véase Jessica Carter, "Philosophy of Mathematical Practice —Motivations, Themes and Prospects", en *Philosophia Mathematica* 27 (2019) 1-32.

Como cualquier otra actividad humana y desde un punto de vista semiótico multimodal[6], en una práctica matemática todos sus practicantes recurren a diversos instrumentos que de alguna manera están relacionados con las diferentes virtudes epistémicas que valoran en su trabajo cotidiano y entre las cuales destaca la comprensión. Podemos suponer que tales ideas no son exclusivas de las matemáticas, sino que son comunes a diversas prácticas intelectuales. Pero nosotros nos centraremos en aquellas que conducen al, o que contribuyen a la producción del, conocimiento matemático.

Nuestro objetivo aquí es abordar los requisitos de la semiótica multimodal y analizar las opiniones de algunos matemáticos sobre el problema de la comprensión, intentar explicar su papel, posibilidad y necesidad en matemáticas a través de tres notables dimensiones, y concluir con algunos comentarios.

2. Semiótica multimodal en matemáticas: lenguaje, simbolismo e imágenes

Pocas personas pondrían en duda que la matemática es un lenguaje porque forma un sistema de símbolos que comunican a una comunidad. En apariencia, el lenguaje matemático es un lenguaje sencillo, con poca gramática y con un vocabulario limitado, pero muy distinto de otros lenguajes. A diferencia de los lenguajes naturales, es un lenguaje definido de forma rigurosa, de modo que su mayor ventaja es justamente su carencia de ambigüedades. Como lenguaje formal, no puede expresar una amplia variedad de cosas, pero puede hacer afirmaciones precisas e inequívocas sobre cosas vagamente determinadas y puede adaptarse a las necesidades de una aplicación concreta que extiende su utilidad de forma considerable, aunque en tanto que aplicación plantea un gran desafío. Este desafío es de naturaleza principalmente lingüística, reconociendo, como Manin señala, que "[l]a base de toda cultura humana es el lenguaje, y [l]a matemática es un tipo especial de actividad lingüística"[7].

Un *lenguaje* es un medio para expresar o comunicar de modo verbal o visual hechos, opiniones, pensamientos, sentimientos, deseos, mandatos, etc.[8]. Cada lenguaje emplea símbolos abstractos, verbales o visuales, para representar

[6] La multimodalidad es una perspectiva utilizada para comprender la contribución de varios recursos semióticos (verbal, visual, aural…) a los estudios de la comunicación. Desde hace un par de décadas, los investigadores asumen que el análisis del lenguaje verbal no es suficiente si el objetivo es comprender plenamente la comunicación. Como Carey Jewitt ("Introduction: Handbook rationale, scope and structure", en *The Routledge Handbook of Multimodal Analysis*, edición de C. Jewitt, London, Routledge, 2nd edition, 2014, p. 1) resume acertadamente, "la multimodalidad aborda la representación, la comunicación y la interacción como si fueran algo más que lenguaje". La mayoría de los textos, la mayoría de las declaraciones y la mayoría de los casos de comunicación son multimodales.

[7] Yuri I. Manin, *Mathematics as Metaphor. Selected Essays of Yuri I. Manin*, Providence, RI, American Mathematical Society, 2007, p. 80.

[8] Véase Robert L. Baber, *The Language of Mathematics. Utilizing Math in Practice*, Hoboken, NJ, John Wiley & Sons, 2011.

las cosas. Las matemáticas poseen estas características en tanto que lenguaje, aunque con diferente énfasis e importancia. El alcance y la distribución de los tópicos comunicados por los lenguajes naturales y los comunicados por el lenguaje matemático difieren de forma significativa. Los sentimientos y las emociones no se expresan en términos matemáticos, y los términos definibles de forma imprecisa no se permiten en el lenguaje matemático. El carácter formal del lenguaje matemático facilita el análisis y el razonamiento a través de la manipulación mecánica de símbolos, según reglas precisas. Así, lo que hacen los matemáticos es razonar sobre objetos abstractos, una tarea calificada como lógica, y este razonamiento suele incluirse en la modelización de los objetos, los hechos o los sucesos que encontramos en el mundo físico y que son estudiados por las diferentes ciencias y la técnica. Con los modelos resultantes, los científicos hacen descripciones y predicciones con el fin de comprender el mundo en que vivimos.

Es obvio que la comprensión del lenguaje se ve mejorada por el conocimiento de sus principales elementos gramaticales. Esto es particularmente cierto del lenguaje matemático por la complicada estructura de muchas de las proposiciones de la matemática superior y porque se asume que estas proposiciones son precisas y carecen de las ambigüedades propias del lenguaje natural.

La complejidad matemática contrasta con el número relativamente pequeño de conceptos básicos y términos que solemos utilizar para expresar todas las proposiciones matemáticas. Pero ello no significa que los textos matemáticos estén escritos en un simbolismo completamente formal, que sería difícil de leer. Es costumbre escribirlas utilizando también el lenguaje coloquial, evitando la imprecisión. Lo ideal es escribir de la manera más accesible asegurándose de que el posible lector será capaz de seguir el razonamiento y hacerlo más formal si las circunstancias lo requiriesen. Y aquí es donde interviene la lógica: cuando un argumento o una demostración matemáticos son difíciles de entender, la mejor y más convincente forma de mostrar que son válidos o correctos es presentarlos formalmente. El proceso se puede invertir. Sería extremadamente fácil eliminar el formalismo, sustituyendo cada símbolo por palabras y frases del lenguaje natural, y el resultado seguiría siendo una demostración. De hecho, sería la *misma* demostración. El lenguaje elegido, sea simbólico, verbal o visual, puede afectar a la longitud de la demostración, o a la facilidad con la que se puede comprender, pero no afecta a si el argumento constituye o no una demostración.

Por otra parte, la complejidad se asocia por lo general a dominios de actividad especializados. Estos dominios tienen vocabularios y lenguajes especializados, los cuales facilitan a los profesionales la tarea de comunicarse de forma eficaz en relación con los temas en ellos estudiados. El problema es que esa especialización puede excluir a personas que no han sido introducidas en este tipo de práctica, como suele ocurrir con la matemática. Su alto grado de abstracción puede ser un obstáculo no sólo para comunicarse con otras personas, sino también para producir y transmitir nuevos conocimientos matemáticos. Por lo tanto, es realmente importante ser muy preciso acerca de lo que sea el lenguaje matemático. El modo más fácil de hacerlo es identificándolo con los sistemas formales. Basta con reconocer un vocabulario o conjunto de símbolos formales y un conjunto de reglas que gobiernan la construcción de enunciados o fórmulas bien formadas. Para algunos, la actividad y la comunicación matemáticas dependen en parte de la formación y la transformación de sucesiones de fórmulas. Otros han reconocido también otros sistemas semióticos como por ejemplo los recursos visuales tales como las gráficas y los diagramas que juegan un papel importante en el proceso de producir, comunicar y comprender el conocimiento matemático. Sin duda, el tema no es nuevo, y desde los griegos ha tenido un largo recorrido. Así, aunque Platón acepta que el razonamiento matemático es hipotético-deductivo, en el caso del diálogo *Menón* de Lorenzo recuerda que lo que "interesa destacar es el enlace entre palabra y diagrama y que, al final, es el diagrama el que, en el fondo, resuelve la cuestión", facilitando así la comprensión. Otro tanto sucederá con Descartes, en el que "lo geométrico figural" quedará vinculado "con la escritura, con el ideograma" a través de la geometría algebraica[9]. Se ha defendido incluso que el papel argumentativo de las fotografías en la ciencia y los diagramas de las matemáticas es probatorio[10].

Pero, desde un punto de vista semiótico, ¿qué encontramos en las características del lenguaje matemático?

(1) El *vocabulario* especial usado para nombrar objetos y procesos matemáticos. Incluye palabras matemáticas apropiadas como *asíntota*, *logaritmo*, *paralelepípedo*, *trigonometría*, *hipérbola*, etc., y palabras en común con el lenguaje natural como *máximo*, *mínimo*, *conjunto*, *campo*, *multiplicar*, *punto*, etc., originadas en contextos no matemáticos, a veces con un significado algo diferente y adaptado para fines matemáticos rigurosos. Las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas suelen estar relacionadas con el uso de esas palabras de la manera matemática apropiada.

(2) El desarrollo de *un conjunto* denso *de palabras* como *mínimo común múltiplo*, *tangente a una curva parametrizada* o *curva logarítmica entre dos puntos*. Para que se entienda el conjunto de palabras debe ser tomado en su integridad como una unidad de significado. Esta unidad proporcionará la información condensada y la combinación requerida en frases matemáticas más largas. La complejidad lograda permitirá dar cuenta de conceptos matemáticos superiores.

9 Javier de Lorenzo, "Espacios matemático, físico y vivencial. El papel de los diagramas geométricos", en *Estudios filosóficos* 65 (2016), pp. 330 y 337.

10 Ian J. Dove, "On images as evidence and arguments", en *Topical Themes in Argumentation Theory*, edición de F. H. van Eemeren y B. Garssen, Dordrecht, Springer, 2012, pp. 223-238.

(3) La *transformación de procesos en objetos*. La forma lingüística de hacerlo es formando un *sustantivo* a partir de un *verbo*. Por ejemplo, *transformación* a partir de *transformar*, *integración* o *integral* a partir de *integrar*, como en la *transformación de Laplace* o la *transformación de Fourier*, y en *integración numérica* o *integración simbólica*, o *integral de Riemann*, etc. A veces el verbo queda sustantivado, como en *integrar por partes* (aunque también se habla de *integración por partes*). Esta objetivación de un proceso sirve al menos para dos propósitos: recordarnos nuestro pensamiento sobre la naturaleza de la actividad matemática y la forma en que la gente puede relacionarse con la matemática. La consecuencia es que los agentes o los practicantes quedan volatilizados, como si nunca hubiera existido la agencia humana en la matemática, como si nadie hubiera estado implicado en un discurso matemático fructífero. Por lo tanto, es evidente que el discurso matemático es un discurso sin sujetos discursivos, lo que nos lleva a pensar que la matemática propiamente dicha tendría poco que ver con la retórica. Sin embargo, no deja de intrigarnos que, al intentar diseñar un modelo de progreso matemático, Thurston se sirva del concepto de "derivada de una función", para el que encuentra al menos siete significados diferentes, significados que no provienen de cada definición particular, sino de su ilimitada polisemia, de manera que podríamos estar malinterpretando el sentido en el que progresan las matemáticas cuando se exigen definiciones únicas y coherentes para los conceptos matemáticos. Por ello, Thurston concluye, "las diferencias comienzan a evaporarse tan pronto como los conceptos mentales se traducen en definiciones precisas, formales y explícitas"[11].

Por otra parte, y como aspecto importante del proceso de pensamiento en términos matemáticos, esa transformación de procesos en objetos permite la creación de nuevos objetos matemáticos que incorporan los procesos y la capacidad de pensar algunas ideas matemáticas como, por ejemplo, la idea de función, como proceso y como objeto. Por sí mismos, estos procesos u objetos pueden estar sujetos a otros procesos (iterativos) como, por ejemplo, la multiplicación, la derivación, la integración, la diferenciación, etc. Sfard[12] ha explicado que este proceso de objetivación implica

> dos movimientos discursivos estrechamente relacionados, pero no inseparables: la *reificación*, que consiste en sustituir el discurso sobre acciones por el discurso sobre objetos, y la *alienación*, que consiste en presentar fenómenos de manera impersonal, como si estuvieran ocurriendo por sí mismos, sin la participación de los seres humanos"

11 William P. Thurston, "On proof and progress in mathematics", en *Bulletin (New series) of the American Mathematical Society* 30 (1994), pp. 163-164.

12 Anna Sfard, *Thinking as Communicating. Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*, New York, Cambridge University Press, 2008, p. 44.

Sin embargo, esto no significa que muchas de las características del lenguaje matemático no tengan un papel importante en la habilitación de la actividad matemática. De hecho, según Sfard, no hay distinción alguna entre comunicarse y pensar, porque –inspirada por Vygotsky y Wittgenstein– define el pensamiento como una forma de comunicación y, por ello, pensar y hacer matemáticas siguen estando identificados en el discurso matemático cuando uno se comunica matemáticamente con otras personas.

Al centrarse en las características del lenguaje verbal, Morgan nos recuerda la importancia de los papeles desempeñados por otros sistemas semióticos en el desarrollo de la matemática. Un ejemplo importante que considerar es la forma en que la algebrización a que Descartes sometió a la geometría permitió transformar este campo. La notación algebraica facilita la manipulación de acuerdo con reglas formales que producen nuevas formas de enunciados que proporcionan nuevos conocimientos matemáticos. En contraste, y por su propia constitución, aunque las formas gráficas no permiten este tipo de manipulación, proporcionan una comprensión más global y dinámica de los objetos representados.

Los elementos de los textos matemáticos que funcionan como unidades discernibles a través de las elecciones sistemáticas de las gramáticas del lenguaje, las imágenes visuales y el simbolismo matemático incluyen gráficas, diagramas, tablas, fragmentos de texto lingüístico y las ecuaciones simbólicas, así como fotografías, mapas y otras formas de trazado gráfico (dibujos, etc.). O'Halloran[13] ha analizado la representación de diferentes modos de comunicación –verbal, algebraico, tabular, diagramático y gráfico– y la conclusión a la que ha llegado es que estos modos ofrecerán diferentes tipos de información sobre el "mismo" objeto matemático[14]. Podemos imaginarnos a nosotros mismos reflexionando, por ejemplo, sobre los aspectos y sobre las acciones que podemos realizar al ocuparnos de una función expresada de forma verbal, algebraica, tabular, diagramática o gráfica.

Según Morgan, las diferencias entre las posibilidades presentadas por los diferentes modos pueden contribuir al desarrollo del conocimiento

13 Kay L. O'Halloran, *Mathematical Discourse. Language, Symbolism and Visual Images*, London, Continuum, 2005.

14 ¿Apoyaría este modo de ver las cosas el platonismo matemático? En circunstancias próximas Roger Penrose (*The Emperor's New Mind*, Oxford, Oxford University Press, 1999, p. 554) escribe: "Cuando los matemáticos se comunican, ello es posible porque cada uno tiene una *ruta directa a la verdad*, la conciencia de cada uno está en condiciones de percibir las verdades matemáticas directamente, a través de este proceso de 'ver'. (De hecho, este acto de percepción suele ir acompañado de palabras como '¡Oh, ya lo veo!') Dado que cada uno puede establecer contacto directo con el mundo de Platón, pueden comunicarse entre sí más fácilmente de lo que cabría esperar. Las imágenes mentales que cada uno tiene, al hacer este contacto platónico, pueden ser bastante diferentes en cada caso, ¡pero la comunicación es posible porque cada uno está directamente en contacto con el *mismo* mundo platónico que existe externamente!".

matemático por medio de la *conversión*. Es decir, la conversión de un modo a otro modo implica "comprender y coordinar las estructuras matemáticas de ambos modos"[15]. Por ejemplo, trazar la gráfica de una función dada en forma algebraica o formular la ecuación algebraica para una gráfica determinada. En este sentido, las nuevas tecnologías aplicadas a las matemáticas han permitido diseñar entornos en los que las diferentes formas semióticas de representación son epistemológicamente relevantes.

La explicación ofrecida hasta ahora de las características del lenguaje matemático no debería hacernos pensar que sólo hay una variedad de este lenguaje. Resulta obvio que los estudiantes no pueden usar el lenguaje especializado como lo hacen los expertos. Además, Burton y Morgan[16] han observado variaciones en las características lingüísticas de varias publicaciones matemáticas. Algunos investigadores tienen en cuenta no sólo los contextos y los campos estrictamente matemáticos, o su propia condición de practicantes, sino también los contextos y los campos educativos. Por otra parte, también es obvio que los diferentes objetivos perseguidos por la comunicación matemática requieren el uso de diferentes modos de lenguaje. Así, por ejemplo, para explicar los pasos seguidos para resolver un problema matemático, utilizaremos un lenguaje cuyas características serán diferentes de las utilizadas para presentar la demostración rigurosa de una conjetura. Por lo tanto, lo mejor que podemos hacer es considerar el lenguaje matemático como un conjunto de modos de lenguaje que comparten las características que hemos estado comentando, y los rasgos especializados que nos permiten identificarlas como matemáticas. En este sentido, es muy conveniente hablar de multimodalidad lingüística en matemáticas, en la medida en que puede reunir los modos o los recursos semióticos para crear significado (imagen, escritura, palabra, etc.) y facilitar la comunicación en matemáticas. De nuevo podemos recordar el caso de Descartes en el que el simbolismo queda elaborado como un sistema semiótico que forma un todo semántico con las imágenes y el lenguaje en el abordaje de los problemas matemáticos[17]. También podríamos citar el descubrimiento con la asistencia de ordenador de nuevas superficies minimales encajadas con el fin de resolver algunos problemas en topología. Hoffman[18] señala que tales imágenes visuales, que fueron los objetos que permitieron llevar a cabo los descubrimientos, son, de hecho, "una parte integral del proceso de hacer matemáticas, no solo una forma de transmitir un descubrimiento

[15] Candia Morgan, "Mathematical language", en *Encyclopedia of Mathematics Education*, edición de S. Lerman, Dordrecht, Springer, 2014, p. 390.

[16] Leone Burton y Candia Morgan, "Mathematicians writing", en *Journal for Research in Mathematics Education* 31 (2000) 429-453.

[17] Kay L. O'Halloran, *op. cit.*, pp. 38-46.

[18] D. Hoffman, "The Computer-Aided Discovery of New Embedded Minimal Surfaces", en *Mathematical Intelligencer* 9 (1987), p. 21.

hecho sin su uso". Hoffman destacaba que esas imágenes visuales le evocan "el estado de comprensión que tenía en el momento en que fueron creadas".

La multimodalidad explora cómo el potencial de significación individual y combinado de diferentes recursos semióticos define, y se define, a través de la comunicación. Algunos de los focos clave de la investigación multimodal están representados por el potencial semiótico y el uso de modos individuales, las relaciones intersemióticas, las conexiones entre multimodalidad y tecnología o las conexiones entre conocimiento, pedagogía y alfabetización. O'Halloran muestra que la "visión histórica del paisaje semiótico en matemáticas revela cómo el conocimiento matemático evoluciona y se materializa a medida que los objetos, las actividades y los sucesos multimodales y multisemióticos se construyeron usando recursos semióticos que son moldeados por las tecnologías sociales y científicas" [19].

Por tanto, podemos considerar las matemáticas como un proceso semiótico multimodal que integra lenguaje, imágenes y simbolismo con el fin de producir conocimiento. La integración de los sistemas lingüísticos, visuales y simbólicos extiende el desarrollo semántico de la matemática más allá de los límites de otras formas de comunicación. Es evidente que este desarrollo ha dado lugar a nuevos ámbitos del conocimiento y ha tenido un enorme éxito en las ciencias naturales. Esta es la razón de que no sea difícil pensar en la matemática conceptualizada como un proceso semiótico multimodal diseñado para ir más allá de la experiencia cotidiana hasta alcanzar un dominio semiótico abstracto donde reestructurar el pensamiento y la realidad y poder entender cómo la matemática logra su carácter funcional. Desde esta perspectiva[20], conviene retener dos ideas importantes: primera, los sistemas de signos actúan como herramientas para estructurar el pensamiento y la realidad; y, segunda, el desarrollo de nuevos sistemas integrados y escritos que combinan formas textuales –lingüísticas, simbólicas– con formas visuales –gráficas, diagramas o figuras– permite construir nuevas visiones del mundo.

Sin embargo, la notación matemática moderna se desarrolló de forma escrita y se desarrollaron nuevas estrategias visuales. Según O'Halloran,

> la imprenta y el cambio posterior a formas estandarizadas de notación simbólica, allanaron el camino para el desarrollo de la notación simbólica matemática como herramienta semiótica desarrollada para los modos escritos (y hoy digitales) de comunicación[21].

[19] L. O'Halloran, *op. cit.*, p. 113.

[20] Véase *ibid.*, p. 288.

[21] *Ibid.*, p. 293.

El simbolismo matemático se transformó para diferentes propósitos y, en particular, sirvió de base de argumentos sobre los descubrimientos científicos, contribuyendo tanto a la transformación de la visión científica del mundo como al sistema gramatical para codificar el significado. Por otro lado, la derivación de resultados permitió reorganizar de manera sencilla las configuraciones que se codificaban de manera económica y no ambigua utilizando la notación espacial y posicional, símbolos especializados, operaciones, paréntesis, etc. Estos recursos crearon una representación dinámica de múltiples relaciones fáciles de comprender y de manipular. Como el simbolismo estaba relacionado con las imágenes, se creó una conexión semántica entre el lenguaje matemático, el simbolismo y la imagen como primer paso hacia la semiosis multimodal. Al final, precisa O'Halloran, las imágenes juegan un papel importante,

> porque las partes se ven en relación con todo el constructo matemático, abriendo nuevas vías de razonamiento. De forma significativa, las imágenes matemáticas también se relacionan con nuestra experiencia sensorial vivida, proporcionando un puente desde la comprensión perceptual del mundo hasta el reino semiótico abstracto de las matemáticas, lo que a su vez conduce a nuevas abstracciones, dados los estrechos vínculos entre las imágenes y la notación matemática[22].

En cualquier caso, los tres modos semióticos, lenguaje, simbolismo e imágenes, se combinan en el discurso matemático real y operan de forma simultánea representando de alguna manera lo que está sucediendo en el mundo de las matemáticas desde un punto de vista *experiencial* y desde un punto de vista *lógico*. Con el primero, se interpretan las experiencias y, con el segundo, se interpreta las relaciones lógicas entre los significados experienciales. Por lo tanto, el discurso matemático no es sólo un recurso para representar y realizar de manera abstracta operaciones lógicas sobre aspectos del mundo matemático, sino también una forma de experiencia con las imágenes visuales conectadas a través de los sujetos que hacen o estudian matemáticas intentando comprender el mundo matemático.

3. Comprensión en matemáticas

La actitud de algunos matemáticos, filósofos, y educadores con algunas demostraciones matemáticas refleja un deseo progresivo por comprender y no solo el deseo de saber por qué las proposiciones demostradas son verdaderas. Parece que el principal compromiso de los matemáticos es, con la

[22] *Ibid.* p. 296.

comprensión. Así, Thurston señala que "[m]ás que conocimiento, la gente quiere *comprensión personal*"[23].

Siguiendo a Kant, Kitcher[24] identifica el objetivo de la comprensión y el objetivo de la verdad como los dos últimos objetivos de la investigación racional. Pensamos que esta identificación es correcta, pero cuando atendemos a las opiniones de algunos matemáticos, la comprensión, entendida como un objetivo epistémico, se presenta como más relevante. Los matemáticos reivindican la comprensión y están efectivamente interesados en incrementarla y en comprender por qué los resultados son verdaderos. Aunque el matemático tiene a veces una aprehensión intuitiva de la verdad de una proposición, suele decirse que la demostración es la fuente de su verdad, que solo funciona como una certificación de la verdad de una proposición particular, es decir, la demostración es el instrumento que garantiza que la proposición es verdadera. Pero, esto no es suficiente para el matemático. Ante un resultado, quiere saber por qué es así y comprender para qué vale. Al menos cuando falta comprensión, el matemático no se siente particularmente cómodo con el resultado. Este puede ser verdadero, pero si el matemático no lo comprende, siente que le falta algo. Si se descubre que el resultado es falso, siempre tiene algo que aprender. La demostración le proporciona un mejor conocimiento e incrementa su comprensión. Como Polanyi señala acertadamente, la matemática es una expansión de la comprensión. Si el conocimiento admite grados, entonces el paso en esta dirección es obviamente preferible. Por otro lado, si una buena demostración es una demostración que nos hace saber más[25], una que no nos permite saber por qué el resultado es cómo es, no es lo bastante buena.

Este énfasis que los matemáticos ponen sobre el objetivo epistémico de la comprensión como un fenómeno natural al desarrollar la matemática encuentra expresión en los escritos de algunos de ellos. Así lo declara Atiyah. Pero, no todo el mundo es capaz de comprender todo lo que los matemáticos han hecho o están haciendo. ¡Ni siquiera los mismos matemáticos! Cuando Faltings demostró la conjetura de Mordell sobre la existencia de un número finito de puntos racionales en una determinada curva algebraica en geometría algebraica, Ewing escribió: "En 10 años tendríamos que estar en una mejor posición de juzgar la importancia de la obra de Faltings formulando estas preguntas: ¿Quién la ha comprendido? ¿Quién ha intentado hacerla comprensible?"[26]. Ewing compara esta demostración con la de la trascendencia de π (1882) obtenida por Lindemann, una demostración "esotérica e intratable" que necesitó la aplicación de los "expertos del campo" para hacerla

[23] William P. Thurston, *op. cit.,* p. 174.

[24] P. Kitcher, *The nature of mathematical knowledge,* p. 305.

[25] Cf. Yuri I. Manin, *op. cit.,* p. 207.

[26] J. Ewing, "The theorem of the century", en *The Mathematical Intelligencer* 5 (1983) 5.

"elegante y elemental". En 1990, 1991 y 1995 se hallaron otras demostraciones y generalizaciones del teorema de Faltings, alguna de ellas más simple, y en 2020 Lawrence y Venkatesh publicaron una demostración alternativa que se basaba en la teoría *p*-ádica de Hodge, recuperando algunos de los ingredientes más sencillos de la demostración original del matemático alemán. Ese proceso ha permitido profundizar la comprensión de la conjetura de Mordell y del resultado de Faltings. Por ello, en opinión de Atiyah, "[u]na demostración es importante en la medida que es una comprobación de tu comprensión. Yo puedo comprender, pero la demostración es la comprobación de que yo he comprendido..."[27]. En el momento de comunicar los resultados matemáticos, también se tendría que comunicar comprensión. Por eso Atiyah sigue diciendo:

> Pero, es difícil comunicar comprensión porque esto es algo que consigues al vivir con un problema durante mucho tiempo. Lo estudias, quizás durante años, lo sientes y está metido en tus huesos. No puedes transmitirlo a nadie más. Después de haber estudiado el problema durante cinco años puedes ser capaz de presentarlo de manera que cualquier otra persona podría llegar a este punto en menos tiempo del que tú has necesitado, pero si no has luchado con el problema y has visto todos los escollos, entonces no lo has comprendido realmente[28].

Por lo tanto, la gente no sabe o no comprende por qué un teorema es verdadero. Ello queda reservado al matemático que trabaja en la correspondiente área, no a cualquier matemático. De alguna manera, el matemático tiene que transmitir algún tipo de explicación o aclaración porque, para la comunidad matemática, ello es probablemente más importante que el hecho de que la demostración venga a verificar el enunciado del teorema. Ante demostraciones que no incrementan la comprensión, algunos matemáticos todavía la reclaman. De ello es un buen ejemplo la declaración de Paul Halmos sobre el teorema de los cuatro colores:

> Siento que nosotros, la humanidad, aprendimos muy poco de la demostración; casi estoy tentado de decir que como matemáticos no aprendimos nada en absoluto. Los oráculos no son herramientas matemáticas útiles. (...) El desarrollo de la matemática abrevia las demostraciones, da perspicacia y profundiza la comprensión mediante el descubrimiento de nuevos conceptos y mediante la subsunción de los antiguos bajo una teoría general adecuada que costó años, décadas y a veces siglos de trabajo construir. (...) Todavía podemos estar lejos de encontrar una "buena" demostración del teorema de los cuatro colores [29].

27 "An Interview With Michael Atiyah", en *The Mathematical Intelligencer* 6, n, 1 (1984),

28 *Id.*

29 Paul. R. Halmos, "Has Progress in Mathematics Slowed Down?", en *The American Mathematical Monthly* 97 (1990), p. 577. En 1995, Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour

Por otro lado, en su actividad práctica, los matemáticos demuestran y vuelven a demostrar teoremas, a veces cientos de veces, para comprenderlos mejor. Ahí está el caso de la ley de reciprocidad cuadrática que refiere al *teorema áureo* dentro de la teoría de números[30] o el caso del que quizás sea el teorema más famoso de las matemáticas, el teorema de Pitágoras, para el que, a principios del siglo XX, Loomis compiló una colección de más de 350 demostraciones, que se publicó en 1927[31]. La complejidad inicial de una primera demostración va cediendo a través de otras demostraciones hasta alcanzar un nivel razonable de complejidad. En el proceso, los matemáticos descubren y comprenden otros aspectos de su ciencia y de la teoría en la que la demostración se enmarca.

Todo esto sugiere la necesidad de centrar la atención sobre la visión del matemático activo para conseguir una mejor comprensión del asunto. La gente solo sabe que un teorema es verdadero porque sabe que se ha aceptado una demostración o porque un matemático lo ha dicho. Parece que la validez de una proposición y la experiencia que la gente tiene de su verdad surge del hecho de que ha sido demostrada. Si no tenemos una demostración, algo se echa de menos. "No es matemática mientras no haya sido finalmente demostrada" dice Mac Lane[32], quien propone la siguiente secuencia para la comprensión: intuición, ensayo, error, especulación, conjetura, demostración. Podemos tomarnos en serio esta secuencia como una secuencia racional porque está guiada por un intento de conseguir aquello que es un objetivo epistémico de las matemáticas: en opinión de Mac Lane[33], la demostración no es solo un medio para la certeza, sino también un medio para la explicación y la comprensión.

4. Dimensiones de la comprensión matemática

Un objetivo epistémico de las matemáticas es la comprensión de los resultados conseguidos. Pero las matemáticas están permanentemente involucradas

y Robin Thomas ("The Four-Colour Theorem", en *Journal of Combinatorial Theory* (Series B) 70 (1997) 2-44.) obtuvieron una demostración mejorada, pero todas las demostraciones conocidas requieren asistencia informática seria. No se trata de pasar el problema al ordenador, porque los problemas interesantes requieren mucho más que aritmética o álgebra. Se trata de estructuras e ideas, y este problema también implica al razonamiento visual. Véase Robin Wilson, *Four Colors Suffice. How the Map Problem Was Solved*, Princeton, NJ, Princeton University Press, edición en color revisada, 2021.

30 Jamie Tappenden, "Mathematical concepts and definitions", en *The Philosophy of Mathematical Practice*, edición de P. Mancosu, Oxford, Oxford University Press, 2008, pp. 260-261.

31 Véase Elisha Scott Loomis, *The Pythagorean Proposition*, Washington, DC, NCTM, 1968; y su edición y traducción al alemán críticamente anotada por Mario Gerwig, *Der Satz des Pythagoras in 365 Beweisen. Mathematische kulturgeschichtliche und didaktische Überlegungen zum vielleicht berühmtesten Theorem der Mathematik*, Berlin, Springer Spektrum, 2021.

32 En Michael Atiyah *et alii*, "Responses to 'Theoretical Mathematics': Toward a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics, by A. Jaffe and F. Quinn", en *Bulletin (New series) of the American Mathematical Society* 30 (1994), p. 192.

33 Saunders Mac Lane, *Mathematics, Form and Function*, New York, Springer, 1986, pp. 378-379.

en procesos de generación de nuevas ideas y teorías. Así, en la comunidad matemática resulta razonable la búsqueda de la comprensión del alcance y la efectividad de los resultados. Esta es la razón de que la epistemología para la matemática debería tomar en consideración la importancia de la comprensión matemática. ¿Es posible decir si un matemático comprende o no, o si ha comprendido la matemática previamente introducida? Las respuestas a preguntas que han sido formuladas por otros matemáticos o la habilidad para plantear buenos problemas y conjeturas, es decir, la capacidad para transformar la información previamente obtenida, revela un cambio cualitativo en la comprensión. En otras palabras, la habilidad para hacer matemáticas de una manera persuasiva a los ojos de la comunidad pone de relieve la dimensión *progresiva* de la comprensión. En virtud de esta dimensión también podemos hablar de otras dos. La primera es la dimensión *pasiva*, pensada para permitir la posibilidad de que el matemático esté examinando una demostración completada. Eventualmente puede descubrir la idea que hace funcionar la demostración y comprender por qué el teorema es verdadero. En este caso, debido a que el matemático posee un conocimiento de fondo que le permite comprender la información obtenida, está preparado para explicar o exponer esta información y, dependiendo de las circunstancias, puede plantear otras cuestiones. La segunda es la dimensión *activa* o *creativa*, típicamente ilustrada por un matemático que busca una demostración para una conjetura o una demostración alternativa. De alguna manera, la matemática se desarrolla a través de la comprensión del matemático, y es este rasgo de la ciencia exacta el que esta noción de comprensión activa intenta capturar. Desde esta dimensión, la comprensión desempeña una doble función: es el vehículo a través del cual el matemático activo produce ciertos conceptos en su imaginación y es el medio a través del cual interrelaciona unos conceptos y expande otros. Cuando los especialistas en el campo pueden comprender y juzgar el resultado más reciente como algo que consigue su objetivo, la comunidad asiste a un nuevo signo de progreso.

La dimensión pasiva de la comprensión deja prácticamente el individuo con los elementos proporcionados por el conocimiento. Alguien podría intentar aprender a hacer matemáticas estudiando cualquier libro de matemáticas. Sin que importe demasiado cuán cuidadosamente podría reproducir o explicar algunas demostraciones, por ejemplo, no podríamos decir que sabe cómo hacer matemáticas si no es capaz de usar su conocimiento para hacer matemáticas. Está claro, "hacer matemáticas" significa "hacer alguna contribución a cualquier campo matemático como un matemático activo suele hacer". A través de la educación, un individuo adquiere suficiente experiencia con las cuestiones matemáticas y se forma una opinión sobre aquello que significa comprender algo en matemáticas. Naturalmente, esto solo es posible si el profesor comunicó comprensión cuando estaba comunicando matemáticas, y los libros objeto de estudio fueron escritos para comunicar comprensión. Sería deseable encontrar en este contexto de la comunidad educativa poca diferencia respecto a la presentación de un resultado en la comunidad matemática: la búsqueda de comprensión podría ser la piedra de toque de ambas comunidades.

La explicación depende de la comprensión. La habilidad para ofrecer una explicación es una buena indicación de que una persona comprende. Nadie puede explicar aquello que no comprende, y nadie puede explicar todo lo que comprende. En la comprensión hay elementos que son parte de la experiencia personal, que son inexplicables y que no se han podido o sabido explicar o comunicar verbal o visualmente. Son los elementos que configuran el componente tácito del conocimiento, según Polanyi[34]. Por otro lado, la explicación es comunicación. El asunto que se tiene que comunicar proporciona comprensión de algunos hechos o resultados matemáticos. Así, esta comprensión permite que alguien conozca algo, pero de una manera organizada. En nuestro caso, el conocimiento de los conceptos matemáticos involucrados y sus interrelaciones. El conocimiento contribuye a la comprensión, porque recoge algunos de los elementos que constituyen la comprensión. En adición a este conocimiento, el matemático puede usar el resultado de una manera intuitiva. Entonces es posible observar una importante diferencia entre conocimiento y comprensión: se puede conocer un resultado matemático sin comprenderlo, pero cuando la comprensión interviene hay algo más que conocimiento, algo que da al resultado su riqueza. Esta es la razón de que la gente quiera comprender. La última fuerza conductora de la comprensión tiene que ser la necesidad de saber más.

Cuando la capacidad de comprender se ejerce, puede no tener efecto o puede tener como resultado un almacenamiento de parte o de toda la información adquirida. Con esto, la comprensión deja a la gente en la vía de la acción, aunque también es cierto que la calidad de la comprensión establece algunas diferencias entre la gente: no todo el mundo es capaz de dar un paso en la dirección de la creación matemática. Además, quien estudia un resultado matemático necesita de la comprensión, mientras que quien ha conseguido el resultado seguramente lo comprende. En el primer caso, la mejor situación para nuestro individuo es aquella que le permite conseguir comprender, por ejemplo, el teorema y el papel de la demostración en el establecimiento de su validez, y revelar las relaciones entre las ideas involucradas, exactamente porque fue capaz de comprender las proposiciones que examinaba. A pesar de esto, la comprensión de un resultado involucra, pero no se reduce, la comprensión de las proposiciones. Este es el caso del individuo que ha conseguido el resultado. Su conocimiento presupone que fue capaz de dominar algún lenguaje dentro del cual enmarcar aquellas proposiciones, y su comprensión

[34] Michael Polanyi, *Knowing and Being*, Chicago, The University of Chicago Press, 1969.

de esta situación matemática particular forma la base sobre la cual descansan las intenciones subyacentes a sus acciones.

La dimensión activa de la comprensión es la genuina de la matemática. La actividad del matemático se presenta como una consecuencia de su comprensión. Piensa que comprende la situación matemática, y que algo lo impulsa a buscar hechos adicionales que puedan incrementar su conocimiento, su convicción y su comprensión. Demostrar una proposición ayuda a comprender el fenómeno descrito por la proposición, las conexiones entre ideas involucradas, y deja el matemático en el camino de comprender otros fenómenos, por ejemplo, la naturaleza de la teoría matemática. Hay una forma de explicar qué es la comprensión matemática si tomamos "comprender un resultado" con el significado de "ser capaz de producir más resultados".

En la referida secuencia de Mac Lane, la comprensión se incrementa gradualmente. Aquí la comprensión de una conjetura tiene que preceder el descubrimiento de una demostración para ella. Es decir, las consideraciones heurísticas nos permiten saber si una proposición es verdadera antes de proceder a buscar una demostración. Parece que los antiguos babilonios y egipcios creyeron, comprendieron y conocieron ciertas verdades sin tener a su alcance las técnicas de demostración que posteriores matemáticos han estado utilizando. De hecho, cuando un matemático llega a saber que una proposición es verdadera, suele llegar a saber algo más, si ha comprendido la relevancia y las implicaciones del resultado. Pero la demostración profundizará su comprensión de esta verdad. De alguna manera, una demostración actúa como una función expansiva de la comprensión. Da lugar a la dimensión progresiva de la comprensión. Sin embargo, si el matemático no consigue obtener una demostración, puede publicar una explicación de sus consideraciones heurísticas. Estas podrían proveer el germen de nuevas ideas y técnicas y la clave para resolver algunos enigmas matemáticos. El estudio de la explicación publicada puede dar lugar a posteriores correcciones, refinamientos, mejoras y a una demostración presumiblemente válida.

La educación matemática y la conversación con intercambio de ideas a un nivel de comprensión son los trasfondos de esta plataforma creativa de las matemáticas. El deseo de comprender algún problema o tópico lleva al matemático a seguir meditando profundamente. Tarde o temprano cree que ha comprendido, si bien puede seguir teniendo algunas reservas. Enfrascado en el estudio, puede llegar a alguna idea plausible, que empieza a rumiar y que eventualmente será contrastada. Polanyi[35] señala la condición tácita de esta evaluación de la plausibilidad basada sobre un amplio ejercicio de intuición que se caracteriza como una habilidad ordinaria para conjeturar que está guiada por

[35] *Ibíd.*, pp. pp. 76 y 144.

muchas indicaciones sutiles y que podría resultar ser correcta[36]. Habitualmente ni el proceso completo es corto, ni suele ser obra de un solo matemático, y el punto donde este deja el escenario, está precedido por una explicación o una demostración. Con bastante seguridad, se espera que la explicación o la demostración transmitan e incrementen la comprensión, si nuestro matemático quiere satisfacer su deseo. Si no, difícilmente serán aceptadas por la comunidad.

En resumen, durante la investigación el matemático está intentando preguntarse por algo y comprenderlo. Esta es la experiencia matemática. Pero la comprensión es necesaria para hacer esta experiencia posible y saber qué cuestiones son relevantes. Así, la comprensión también es un elemento constitutivo de esta forma de conocimiento. Por otro lado, la reflexión del matemático sobre el asunto perfecciona la comprensión. En este estadio, la comprensión no es en sí misma una actividad pasiva, puesto que está dirigiendo y conformando la actividad matemática y su contenido. El matemático tiene que imponer comprensión sobre su experiencia, porque no es simplemente una cuestión de conocer esta experiencia y porque esta ni se explica a sí misma ni se muestra fácilmente. Llevando comprensión sobre esta experiencia, el matemático está al borde de transformarla, desarrollando algunos aspectos y construyendo nuevos campos de la realidad matemática. A veces, comprender es una tarea sencilla. Cuando el matemático encuentra sentido a lo que hace, comprende sin dificultad, y entonces no es consciente de esta comprensión. Pero, cuando observa alguna dificultad, por ejemplo, cuando no puede relacionar alguna nueva idea con las antiguas, el problema de la comprensión viene a su atención inmediatamente. Aquí, reflexión y pensamiento desempeñan el papel que les es propio: pensar sobre algo tiene como consecuencia comprender aquello que se piensa. O mejor todavía, el pensamiento va de una comprensión previa a una comprensión modificada.

Según Lakatos[37], este proceso heurístico sigue un camino en zigzag y es imposible de discernir en el producto final. Todo lo que tenemos es un proceso falible y provisional desde el punto de vista de la experiencia, el cual será presumiblemente codificado por el argumento de un matemático. La búsqueda de comprensión hace que el matemático proceda a lo largo de las más prometedoras líneas de pensamiento. Como Pólya indica[38], lo que permite al

[36] El caso de Ramanujan es significativo. Godfrey H. Hardy ("Srinivasa Ramanujan (1887-1920)", en *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*, edición de G. H. Hardy, P. V. Seshu Aiyan y B. M. Wilson, London, Cambridge University Press, 1927, pp. xxx-xxxi) cuenta que sus ideas sobre lo que constituía una demostración eran bastante sombrías. "A todos sus resultados, nuevos o viejos, correctos o incorrectos, había llegado a través de un proceso que combinaba argumentación, intuición e inducción, un proceso para el que fue incapaz de dar una explicación coherente". Así que Hardy consiguió instruir a Ramanujan por su propio bien sin destruir "su confianza ni romper el hechizo de su inspiración". Al final, Ramanujan pudo decir "cuándo había demostrado un teorema y cuándo no".

[37] Imre Lakatos, *Pruebas y refutaciones*, Madrid, Alianza, 1978, p. 59.

[38] George Pólya, *How to Solve It*, Princeton, NJ, Princeton University Press, 2004, p. 185.

matemático observar la presencia o ausencia de signos de progreso es un tipo de extraordinaria sensibilidad mental. Tan pronto como se logra la idea que hace que el argumento funcione, el camino hacia una demostración queda abierto. A lo largo del proceso el matemático ha sido capaz de examinar si era pertinente un contraejemplo o de recoger suficientes indicios para motivar la conclusión y creerla verdadera. Sobre ello tenemos, además, el testimonio de la historia. Así, nos lo dice Kline:

> Los grandes matemáticos saben que un teorema debe ser verdadero antes de que se haya logrado su demostración lógica, y muchas veces se contentan con una mera indicación de la demostración. De hecho, Fermat, en su vasta y clásica obra sobre la teoría de números, y Newton, en su obra sobre las curvas de tercer grado, no daban ni siquiera indicaciones[39].

La historia de la matemática proporciona ulteriores ilustraciones de esta conclusión. No es difícil encontrar argumentos que apenas podrían ser considerados como demostraciones rigurosas. Cauchy ilustra esta situación perfectamente. Ahora se sabe que algunos de sus argumentos son demostraciones inválidas que en algunos puntos fueron corregidas, mejoradas y demostradas por otros matemáticos. Esto no quiere decir que Cauchy fuera incapaz de comprender la matemática. Señala más bien la existencia de niveles cualitativamente diferentes de la comprensión y muestra que la experiencia de la verdad y la adquisición de una demostración podrían localizarse a diferentes niveles. En este sentido, Kline dice de Cauchy: “Cometió otros «crímenes», pero tenía un olfato seguro para lo que era verdadero, aunque no estableciera la verdad mediante los procedimientos de sus propios textos” [40].

Por otro lado, está claro que el matemático tiene que comprender cada paso del proceso y las razones por las que el resultado, una conjetura, tendría que ser verdadero para conseguir la demostración, mejorar su comprensión de todo el campo y continuar descubriendo nuevos hechos matemáticos. Parece entonces que la demostración por sí misma no proporciona conocimiento de la proposición demostrada, al menos no todo el conocimiento, ni induce al matemático a creer su conclusión. Como es obvio, la demostración incrementa el grado de creencia del matemático, pero este ha de tener algún tipo de conocimiento del teorema y algunas buenas razones para creerlo antes de pasar a demostrarlo. Sin embargo, la previa explicación y la génesis de la dimensión pasiva de la comprensión armonizan perfectamente con la idea de que el matemático ha conseguido el adecuado trasfondo para el proceso a través de la educación matemática. Pólya nos da la pista cuando, en el contexto del razonamiento inductivo, dice:

39 Morris Kline, *Matemática. La pérdida de la certidumbre*, Madrid, Siglo XXI, 2ª edición, 1994, p. 378.

40 *Ibíd.*, p. 211.

> Si tienes que demostrar un teorema, no te apresures. En primer lugar, comprende completamente lo que dice el teorema, trata de ver claramente lo que significa. Luego comprueba el teorema; podría ser falso. Examina sus consecuencias, verifica tantos casos particulares como sean necesarios para convencerte de su verdad. Cuando te hayas convencido de que el teorema es verdadero, comienza a demostrarlo[41].

Este tipo de proceso, como en el caso de Atiyah, impulsa el matemático a saber y a comprender por qué la proposición es verdadera. La subsiguiente demostración o demostraciones confirmarán este conocimiento y profundizarán esta comprensión. La verificación de muchos ejemplos persuade al matemático de que ha dado con la verdad y que el proceso le permitirá incrementar la comprensión originada con el primer paso, es decir, comprender el significado del enunciado. Esta "nueva" fase de la comprensión proporciona al matemático las razones de por qué el teorema es o debería ser verdadero, y queda eventualmente convencido.

Ahora vemos claramente que la comprensión es un prerrequisito para la demostración. Sin comprensión, aquella podría no quedar concluida. De hecho, como Feferman señala, "es posible seguir los pasos de una determinada demostración y no comprender la demostración misma"[42]. Pero, la demostración también desarrolla esta comprensión. El matemático hace conjeturas con la posibilidad que sean correctas o incorrectas. La demostración será la confirmación de que su perspicacia fue acertada y que en principio todo el proceso siguió los pasos correctos. Así, la demostración actúa como un experimento. Pero este tipo de experimento no intenta verificar una teoría. Su objetivo es más modesto. Aquí no se utiliza ningún instrumento, en contraste con una demostración asistida por ordenador, aunque para algunos filósofos esta diferencia no es tan importante, puesto que, para ellos, el verdadero problema es la posible existencia de errores en ambos tipos de demostración[43]. En consecuencia, es posible observar también una similitud inducida por estos errores entre demostraciones y experimentos: pueden no ser finales. En el caso de las demostraciones, en un sentido que se presentará en un momento.

La comprensión puede progresar cuando la atención de la comunidad se desplaza de una determinada situación matemática a una nueva motivada por un nuevo resultado. Al comunicar el resultado, el matemático tiene que

[41] George Pólya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, vol. 1, Princeton, NJ, Princeton University Press, 1954, p. 76.

[42] Solomon Feferman, "And so on…: reasoning with infinite diagrams", en *Synthese* 186 (2012), p. 372.

[43] Véase Philip Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, New York, Oxford University Press, 1983, p. 46.

comunicar comprensión y, como Resnik[44] escribe, ello lo ha de hacer de una manera psicológicamente convincente y racionalmente defendible. Parte de esta comunicación es a través de las demostraciones. Las explicaciones del autor se basan en los significados compartidos y el conocimiento existente en la comunidad. Al mismo tiempo, se pretende que estas explicaciones puedan sugerir y transmitir la comprensión lograda por el autor. Como Tymoczko[45] dice, las demostraciones son mensajes dentro de la comunidad. Cada demostración recoge los elementos para un proceso crítico entre los expertos, proceso que tiene que desarrollar la comprensión de los resultados. Hemos caracterizado esta dimensión de la comprensión como progresiva porque, en el contexto de este proceso social, la demostración es sometida a escrutinio y su importancia, finalidad y alcance son evaluados, los errores son identificados y, a veces, corregidos, un contraejemplo puede ser descubierto y, lo que es más importante, la demostración puede ser eventualmente aceptada. Este es el sentido que asignamos al posible carácter no final de las demostraciones.

Pensamos que este tipo de revisionismo es inseparable de la dimensión progresiva de la comprensión. En el caso particular de la demostración, su análisis revisionista contribuye a incrementar la comprensión. A causa de las difíciles innovaciones que aparecen en algunas demostraciones y el gran esfuerzo que significa su captación, necesitan de una ulterior explicación antes de que el significado del teorema quede claro o para calibrar simplemente su importancia para el campo en cuestión. Pero algunos resultados aceptados como verdaderos son de hecho provisionales, y reflejan la mejor, pero posiblemente errónea, comprensión del campo. Si el matemático no la comprende, puede no ser verdadera. En este caso, es posible intentar otra demostración utilizando diferentes técnicas. Como resultado, los matemáticos pueden sentir que su comprensión se ha vuelto más rica.

El proceso heurístico de la matemática es realmente más importante que la elaboración de demostraciones rigurosas. Parece que la razonabilidad y el carácter convincente de los resultados suelen disfrutar habitualmente de prioridad sobre la existencia de este tipo de demostraciones. Por otro lado, los matemáticos difieren en sus concepciones de aquello que constituye una demostración rigurosa. Se sostiene que los cánones de rigor son relativos a aquellos matemáticos activos en una comunidad matemática o incluso, que no hay cánones absolutos de rigor[46]. De hecho, la mayoría de las demostra-

[44] Michael D. Resnik, "Proof as a Source of Truth", en *Proof and Knowledge in Mathematics*, edición de M. Detlefsen, London, Routledge, 1992, p. 16.

[45] Thomas Tymoczko, "Making room for mathematicians in the philosophy of mathematics", en *The Mathematical Intelligencer* 8 (1986), p. 49.

[46] Véanse las cualificadas opiniones de Borel, Gray y Thom en M. Atiyah *et alii*, *op. cit.*, y también Arthur Jaffe y Frank Quinn, "'Theoretical Mathematics': Toward a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics", en *Bulletin (New series) of the American Mathematical Society* 29 (1993) 1-13, para algunas ilustraciones en relación con el trabajo matemático no riguroso.

ciones verbales o escritas simplemente esbozan los detalles relevantes de los argumentos que transmiten suficiente convicción sobre su corrección. Además, la construcción de demostraciones rigurosamente completas da lugar a demostraciones tan largas y de tanta complejidad que una evaluación resulta casi imposible, mientras que al mismo tiempo la probabilidad de incrementar los errores y disminuir la comprensión crece de forma alarmante. Este fue el caso con la demostración del último teorema de Fermat por parte de Wiles que, con un centenar de páginas publicadas, debía de ser de unas 1000 si todos los detalles hubieran sido incluidos. De hecho, después de que Wiles presentara su resultado en una conferencia en Cambridge, otro matemático descubrió un error, error que Wiles[47] pudo vencer muy pronto colaborando con su discípulo Richard Taylor.

Sin embargo, parece que, como ha mostrado Kitcher[48], cuando sea posible, el rigor puede llevar comprensión donde previamente solo había sospecha o duda y puede ayudar a extender los resultados y el razonamiento en nuevas áreas de investigación. En esta línea, la sistematización en un sistema deductivo de axiomas puede realzar o ponderar nuestra comprensión de las teorías matemáticas unificando, simplificando y proveyendo una perspectiva global de ellas. Por otro lado, es cierto que una formalización no puede encapsular los aspectos no formales, no mecánicos, del camino que un matemático sigue hasta llegar a un resultado. El matemático comprende más de lo que es posible expresar formalmente. De hecho, la formalización nunca elimina su dependencia de los aspectos meramente comprendidos. Estos persisten más o menos conscientemente en la obra subsiguiente. Pero como contraste, el resultado de la formalización incluye tantas sugerencias que el matemático nunca puede saber o comprender en su totalidad. Pensamos que este es el sentido de la declaración de Mac Lane de que la generalización y la abstracción son útiles para lograr la comprensión y que los aspectos formales son elegidos y posteriormente desarrollados para mejorar la comprensión. Esperanzadamente, el progreso significativo por cualquier medio debería constituir un incremento apasionante de nuestra comprensión de las matemáticas y sus perspectivas de futuro.

5. Observaciones finales

Hemos intentado destacar la importancia de la semiótica multimodal en matemáticas a través de las relaciones entre sus diversos instrumentos de representación. El objetivo tiene como punto de partida las representaciones verbales, visuales, simbólicas, gráficas, etc. El uso de tales representaciones

[47] Andrew Wiles, "Modular elliptic curves and Fermat last theorem", en *Annals of Mathematics* 141 (1995), pp. 452-454.

[48] Philip Kitcher, "Mathematical Rigor—Who Needs It?", en *Noûs* 15 (1981), p. 486.

forma el vehículo a través del cual se exploran, consideran y justifican las ideas matemáticas, se resuelven problemas, se demuestran nuevos teoremas, se descubren y motivan nuevos resultados y, sobre todo, se profundiza la comprensión de los diversos agentes implicados. El resultado es que la matemática es un camino muy largo en la expansión de las dimensiones de la comprensión desde su comienzo en el contexto social de la escuela, como una interacción entre profesorado y estudiantes, hasta la presentación de un resultado matemático con comprensión en el contexto social de la comunidad matemática. La comprensión es la fuerza que produce actividad y cambio. Con la intuición empieza una parte de la matemática que acaba en demostración y la (necesidad de) comprensión es el elemento dominante y que acompaña en cada paso. Como la demostración sugiere nueva matemática, el círculo se cierra. Esta podría ser considerada como una visión local de la cuestión, pero una visión que puede ser aplicada a cada proceso matemático. El círculo se expande, y como consecuencia también la comprensión. Todo en conjunto explica el carácter especial de la matemática: un proceso dinámico, conducido por la creación de nuevos argumentos/demostraciones (comprensión creativa) y guiado por los debates críticos (comprensión progresiva). Todo ello nos permite concluir con estas observaciones:

(1) Una *comprensión* llena de perspicacia es posible y necesaria en cada nivel de la actividad matemática, incluso al nivel del rigor y la sistematización axiomática.

(2) La *comprensión* en matemáticas es una empresa nunca acabada debido a que las ideas y los resultados matemáticos están permanentemente abiertos a la revisión y a la integración con nuevos materiales.

(3) La *comprensión* activa es un requisito para conseguir nuevas ideas y nuevos resultados matemáticos.

(4) La demostración matemática no es solo un instrumento de investigación, sino también una vía para incrementar la *comprensión,* una vía de la que se espera que pueda mostrar que la *comprensión* del matemático fue acertada.

(5) La comunidad matemática es la garante de esta *comprensión.*

Como resultado, la matemática es una tarea colectiva, cuyo progreso se mide por la *comprensión* de nuevas ideas y nuevos resultados en el contexto de la comunidad matemática que interactúa a través de diversos modos semióticos.

Jesús Alcolea Banegas
Departamento de Filosofía
Universitat de València
Avda. Blasco Ibáñez, 20
46010 València
jesus.alcolea@uv.es