Estudios Filosóficos LXXII (2023) 327 ~ 340

¿SON EXPLICATIVAS LAS PRUEBAS POR INDUCCIÓN? INDUCCIÓN COMPLETA Y EXPLICACIÓN MATEMÁTICA

ARE INDUCTION PROOFS EXPLANATORY? COMPLETE INDUCTION AND MATHEMATICAL EXPLANATION

José Ferreirós
Universidad de Sevilla

Resumen*: En tiempos recientes ha habido desacuerdos sobre si las demostraciones por inducción matemática pueden considerarse "explicativas" o no. En este trabajo se considera la cuestión desde diversos puntos de vista, sobre la base de la idea de que* explicar *se dice de muchas maneras. Primero, se expone y critica un argumento de M. Lange que pretende zanjar la cuestión. Segundo, se considera el papel de los razonamientos inductivos como pieza clave en la sistematización de la aritmética, poniéndolo en relación con las ideas de Kitcher sobre explicación y unificación. Concluimos relacionando las ideas de explicación y comprensión, resaltando los aspectos pragmáticos de esa idea, y argumentando que no es razonable pensar que un único esquema lógico-formal (o dos, a lo sumo) pueda ser adecuado para todos aquellos argumentos que solemos calificar de "explicativos".*

Palabras clave*: inducción matemática, explicación en matemáticas, unificación, sistematización, fundamentos de aritmética.*

Abstract: *In recent times there has been disagreement as to whether demonstrations by mathematical induction can be considered "explanatory" or not. This paper considers the question from several points of view, based on the idea that explaining is said in many ways. First, an argument by M. Lange that purports to settle the question is presented and criticized. Second, we consider the role of inductive reasoning as a key piece in the systematization of arithmetic, relating it to Kitcher's ideas on explanation and unification. We conclude by relating the ideas of explanation*

and understanding, highlighting the pragmatic aspects of that idea, and arguing that it is unreasonable to think that a single formal-logical scheme (or two, at most) can be adequate for all those arguments that we usually qualify as "explanatory".

Keywords: ***mathematical induction, explanation in mathematics, unification, systematization, foundations of arithmetic.***

Los razonamientos por inducción completa tienen una historia milenaria. No me refiero a los intentos de encontrar huellas de tal cosa entre los antiguos, pero como mínimo desde en torno al año 1000 se encuentran razonamientos inductivos (ver Anexo 1). Se trata de una forma de razonamiento genuinamente demostrativo, que se funda directamente en nuestra concepción básica de los números de contar: 1, 2, 3... Por eso el razonamiento por inducción matemática o "paso de n a n+1" ha sido redescubierto una y otra vez en la historia.

Se puede decir, además, que la revalorización de la inducción matemática a partir de aproximadamente 1850 fue una contribución de primer orden a la fundamentación y rigorización de la matemática clásica y moderna. Destacan en este sentido obras como el manual de Grassmann, y muy especialmente el tratado sobre los números naturales de Dedekind, continuados luego por Peano, Skolem y otros. En estas contribuciones más modernas, el razonamiento por inducción matemática va de la mano de las definiciones recursivas, ya sea en un contexto de pensamiento conjuntista (Dedekind) o en otro constructivista (Skolem). Su papel en el tratamiento sistemático de la aritmética y, más generalmente, de toda la matemática es innegable; de ahí que Poincaré[1] lo destacara como el prototipo de razonamiento matemático.

Cosa distinta es la consideración que han despertado las demostraciones por inducción entre los matemáticos y filósofos. Es sabido que hay una falta de consenso en relación al tipo de comprensión o explicación que confiere un RIM (usaré esta abreviatura en adelante para "razonamiento por inducción matemática"): nadie niega la admisibilidad y el *rigor* de dichos razonamientos, pero hay quien los juzga paradigmáticamente *no explicativos*. Tal es el caso de autores como Steiner, Hanna y Mancosu. Sin embargo, otros (como Kitcher, Brown y Baldwin) consideran los RIM como genuinamente explicativos.

Quizá esa falta de acuerdo deba atribuirse, más que al propio RIM, a la noción de explicación, que es considerablemente compleja, polimorfa, oscura. En la filosofía de la ciencia del siglo XX se ha seguido con interés el programa de dar una definición omniabarcante de lo que es la explicación científica, pero los resultados –es bien conocido– han sido poco satisfactorios, parciales

[1] H. Poincaré, "La naturaleza del razonamiento matemático", en *Ciencia e hipótesis*, Madrid, Espasa-Calpe, 2002 [1894], cap. 1.

más bien. No solo hay una pluralidad de modelos de explicación (los de Hempel, de Salmon, etc.) sino que existe también algo así como una impugnación de todo el proyecto, desde la perspectiva pragmática defendida por van Fraassen. ¿En qué sentido se dice que el RIM es no explicativo? O, cuando se afirma lo contrario, ¿en qué sentido se asevera que son explicativos estos razonamientos? Quizá los distintos autores están inmersos en un diálogo de sordos, debatiendo con vigor pero sin ponerse de acuerdo en los términos.

Trataremos de arrojar alguna luz sobre todo esto, en torno al RIM, comenzando por un conocido argumento de Lange. La sección 1 introduce el tema y defiende que el argumento de Lange no consigue probar lo que pretendía. La sección 2 analiza el papel de la inducción matemática en la fundamentación de la aritmética (Dedekind, Peano), mostrando que nos ofrece un caso paradigmático de unificación y sistematización al estilo Kitcher. La sección 3, por su parte, enfatiza el carácter pragmático –dependiente del contexto– de la idea misma de explicación. El trabajo se cierra con unas breves conclusiones.

1. Preliminares sobre el desacuerdo. El argumento de Lange

Existen variantes del razonamiento por inducción matemática (o inducción completa), como puede ser la llamada inducción *fuerte*, pero aquí nos bastará con considerar el tipo más básico de RIM (razonamiento por inducción matemática). Para demostrar que una cierta relación o un enunciado $\Phi(x)$ vale con generalidad para *todos* los números naturales, es suficiente con probar dos cosas:

a. Que $\Phi(1)$ es válido [Base de inducción] y
b. Que, supuesto $\Phi(n)$ para un *n* cualquiera, entonces $\Phi(n+1)$ [Paso inductivo].

En el momento de demostrar el paso inductivo, se hace uso de la "hipótesis" o presuposición de que $\Phi(n)$ es válido.

Veamos un ejemplo que ya demostró Maurolico en el siglo XVI: *la suma de los primeros* n *números impares es* n^2. Podemos primero comprobar que lo enunciado es válido para el caso de 1, y si queremos, para los siguientes: $1+3 = 2^2$, o también $1+3+5 = 3^2$. Esto deja establecida la base de inducción. Vayamos al paso inductivo:

Se trata de verificar lo enunciado para la suma $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$, suponiendo que es cierto para el valor anterior. Usamos ahí que el *n*-ésimo número impar es precisamente $(2n - 1)$. Ahora bien, haciendo uso de la hipótesis:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = (n - 1)^2 + (2n - 1)$$

Y desarrollando el lado izquierdo:

$$(n - 1)^2 + (2n - 1) = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2$$

Tal como había que demostrar. Luego el teorema de Maurolico vale con toda generalidad.

Es habitual en la literatura sobre este tema encontrar la demostración de que la suma de los primeros n números $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ es $= n(n+1)/2$, famoso teorema que se encuentra demostrado ya por Levi ben Gershon en el siglo XIV (y que se asocia a menudo con la niñez de Gauss). Ben Gershon demostró también otros resultados, ofreciendo cuidadosos razonamientos por inducción, en los cuales presentaba primero el paso inductivo. Por ejemplo, demuestra que

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

Los teoremas anteriores pueden considerarse resultados elementales de teoría de números. Hay una infinidad de resultados este tipo, pero la inducción completa también se emplea para demostrar teoremas más profundos. Quizá el mejor ejemplo es el Teorema Fundamental de la Aritmética, donde se demuestra que todo número natural es descomponible –de forma única– en un producto de (potencias de) números primos. Más adelante veremos otro ejemplo, donde el RIM se emplea con un carácter fundacional, para desplegar las propiedades de alguna de las operaciones básicas de la aritmética (sobre la base de su definición recursiva).

La idea intuitiva que subyace al RIM es muy simple y clara. Si una cierta propiedad o relación es válida para los primeros números, y si además podemos justificar que se transmite o "pasa" de un número cualquiera (n) a su sucesor (n+1), entonces dicha relación es cierta de *todos* los números naturales. No hay duda de que esta noción general es clara e iluminadora, tenemos una *comprensión* muy clara y distinta de ella.

Es como si tuviéramos una cantidad ilimitada de fichas de dominó, dispuestas de manera que, al caer una, necesariamente va a caer la siguiente. (Eso es lo que prueba el paso inductivo.) Si además tenemos garantías de que va a caer una primera ficha (base), sabemos que necesariamente caerán todas.

Sin embargo, cuando uno trata de demostrar un resultado concreto, como el de Maurolico o el de Gershon, al trabajar en la justificación del paso inductivo, se puede tener la sensación de una falta de comprensión. Uno está luchando por transformar cierta expresión en otras, manejando lo mejor que puede las operaciones, pero quizá siente la falta de una mejor comprensión –o una explicación– del porqué de las cosas. Cabe pensar que en esta experiencia está el origen de la idea de Steiner, Hanna y Mancosu: que los RIM son paradigmáticamente no explicativos.

En un conocido artículo, Marc Lange[2] ha dado un argumento que pretende demostrar, casi sin presupuestos sustantivos sobre lo que es una explicación, que los RIM *no pueden* ser explicativos so pena de circularidad. Presupone

[2] M. LANGE, "Why Proofs by Mathematical Induction Are Generally Not Explanatory", en *Analysis* 69/2 (2009) 203-211.

solo que hay una relación de inferencia entre un 'explanans' G_1, G_2, … y un 'explanandum' F,[3] más la idea de que las explicaciones no pueden incurrir en circularidad. Este segundo principio va a ser la clave: la idea es que las relaciones de prioridad explicativa son asimétricas.

> Presupondré solamente que las explicaciones matemáticas no pueden ser circulares. Esto es, presupondré que si una verdad matemática ayuda a explicar a otra, la primera es parcialmente *responsable* de la última, de un modo tal que la última no puede ser parcialmente responsable de la primera. Las relaciones de prioridad explicativa son asimétricas. De otro modo, la explicación matemática no sería nada parecido a la explicación científica[4].

Ahora, Lange va a ofrecer un argumento que pretende mostrar que hay una circularidad inevitable en el RIM.

Para ello, Lange contrapone la inducción matemática con base en el caso n = 1 con lo que llama el argumento "arriba y abajo desde 5" [*upwards and downwards from* 5]. En general, cuando disponemos de un argumento por inducción, como el que caracterizamos más arriba, podemos también ofrecer un argumento hacia arriba y abajo desde 5. La estructura es:

a. Se prueba que $\Phi(5)$,
b. Se demuestra que $\Phi(n+1)$ suponiendo $\Phi(n)$, y
c. Se demuestra que $\Phi(n-1)$ suponiendo $\Phi(n)$, siendo $n>1$,

Y con ello queda demostrado $\forall x\, \Phi(x)$. Por supuesto, este tipo de argumento es más complejo y engorroso que el RIM, pero eso no obsta para la conclusión que Lange quiere sacar.

La idea es de lo más simple. En el argumento por RIM, la validez de $\Phi(1)$ es parte de la explicación de que $\Phi(5)$, mientras que en el argumento 'arriba y abajo desde 5', que $\Phi(5)$ es parte de la explicación de que $\Phi(1)$. De aquí, Lange quiere extraer la conclusión de que el RIM no suministra una explicación del teorema que demuestra: sería un ejemplo de demostración rigurosa pero estrictamente no explicativa. "El argumento no se limita a mostrar que *algunas* pruebas por inducción matemática no son explicativas. Muestra que *ninguna* de ellas lo son"[5]. Se incurre en circularidad, se viola la expectativa de asimetría, y por tanto no hay explicación.

Debo decir que este análisis resulta ingenioso, pero superficial. Llama la atención que ponga todo el peso del asunto en la necesidad de recurrir a una

[3] En realidad, en el RIM el explanans tiene solamente dos elementos: G_1 que valida P(x) en un caso particular, y G_2 que demuestra el carácter *hereditario* de la propiedad P(x) (o el enunciado $\Phi(x)$ de que se trate). Esto segundo es la clave, como veremos.

[4] M. Lange, "Why Proofs by Mathematical Induction Are Generally Not Explanatory", p. 206.

[5] *Ibid.*, p. 209.

base de inducción, que en la práctica suele ser el caso $n = 1$ (aunque muchas pruebas por RIM toman $n = 2$ o $n = 3$, etc. por razones particulares de cada caso). Curiosamente, lo más importante ni siquiera se menciona: el paso inductivo viene a establecer que la relación (o propiedad, o enunciado) de que se trata es *hereditaria*. Sigo aquí la terminología de Frege (que habló de propiedades o relaciones "hereditarias"), ya que me parece clara y pregnante.

Que $\Phi(x)$ es válido en un caso particular, forma parte de la explicación del teorema que dice: todos los números validan $\Phi(x)$. Ahora bien, la parte principal del argumento es la otra: la prueba de que $\Phi(x)$ es una propiedad hereditaria.

De una manera inadecuada, Lange pone todo el énfasis en la cuestión de si la premisa G_1 explica (o explica parcialmente) el explanandum F, o mejor dicho, una cierta consecuencia de F: a saber, $\Phi(5)$. Se pasa por alto que el peso de la demostración recae en la otra premisa, G2, la cual establece el carácter hereditario de la propiedad (o relación) o enunciado de que se trata. Sobre todo, en el proceso, se olvida de la cuestión de si el RIM como tal –en su conjunto– puede ofrecer una explicación; esto es, si una demostración completa por RIM puede resultar explicativa (no una de sus premisas, en relación a una consecuencia de su conclusión).

En estos argumentos, el explanandum es una generalización, $\forall x\, \Phi(x)$, de la cual se puede deducir $\Phi(1)$ o bien $\Phi(5)$, que son las consecuencias particulares en la que se fija Lange. Pero no se trata de que una de estas explique a la otra; si el RIM es explicativo, habrá quedado explicado por qué $\forall x\, \Phi(x)$, y por tanto también cualquiera de sus instanciaciones (tanto $\Phi(1)$ como $\Phi(5)$, como cualquier otra). No parece haber en ello ninguna circularidad viciosa.[6]

2. El valor de la unificación: Grassmann y Dedekind

La literatura sobre explicación en matemáticas, en el sentido de *demostraciones* que se califican de "explicativas", es muy abundante. No quiero ocultar mi escepticismo sobre todo este proyecto. A la vista de los resultados obtenidos en las últimas décadas, soy de la opinión que no resulta plausible obtener una caracterización *formal general* de tales demostraciones. Más abajo consideraremos una explicación plausible de por qué la explicación matemática se resiste a un tratamiento general. En particular, los resultados de Mancosu y sus colaboradores han servido para encontrar contraejemplos a los principales intentos de

[6] Por último, cabe destacar que la argumentación de Lange no trata en realidad de la inducción, específicamente, sino que puede ampliarse inmediatamente a cualquier prueba matemática en la que un caso particular forma parte de la demostración de un resultado general. No entraré en más detalles de esta objeción, que Baldwin (J. Baldwin, "Foundations of Mathematics: Reliability and Clarity. The Explanatory Role of Mathematical Induction", en *Language, Information, and Computation – WoLLIC* 16, eds. J. Väänänen, Å. Hirvonen, R. de Queiroz, Dordrecht, Springer, 2016. p 79) desarrolla en detalle.

caracterización que se habían propuesto[7]. Uno de ellos es el de Kitcher[8], quien entiende la explicación en términos de unificación o sistematización teórica. Otro es el de Steiner[9], quien defendió que son explicativas aquellas demostraciones que argumentan en términos de una *propiedad característica* del objeto del cual trata el teorema, y que además resultan ser *generalizables*.[10]

A pesar de las limitaciones de esos enfoques, resulta interesante considerarlos en conexión con el RIM. Si argumentamos en términos de la sistematización o unificación kitcheriana, resulta obvio que la axiomatización de teorías es un candidato muy claro a la sistematización unificadora. Y esto sucede precisamente en la axiomatización de la aritmética, que es un caso paradigmático. Como es bien sabido, no se sintió una necesidad de axiomatizar la aritmética elemental hasta la segunda mitad del siglo XIX, cuando Dedekind[11] y Peano[12] –entre otros– ofrecieron sus sistemas. Y en dichos sistemas axiomáticos brilla especialmente por su papel central el principio de inducción.

Resulta interesante comparar esas contribuciones con lo que había anteriormente. Hacia 1800, la aritmética de los naturales era entendida más bien como un *arte de cálculo*, y no como una ciencia. Esto se aplica por ejemplo a Kant.[13] Los juicios aritméticos que Kant considera suelen ser ecuaciones numéricas elementales, como $7 + 5 = 12$ o bien $3 + 5 = 2^3$; por más que valgan a priori y se juzguen intuitivos, tales juicios no pueden ser axiomas, ya que no son universales, y tendría que haber una infinitud de ellos[14]. Incluso Gauss en 1801 resalta que aquello que comúnmente se llama Aritmética es poco más que el arte de enumerar y calcular; la llama Aritmética elemental y la distingue con claridad de la

7 P. Mancosu, C. Pincock, "Mathematical Explanation", en *Oxford Bibliographies in Philosophy,* ed. D. Pritchard, New York, Oxford University Press, 2012; P. Mancosu, J. Hafner, "Beyond Unification", en P. Mancosu (ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford University Press, 2008, pp. 151-178.

8 P. Kitcher, "Explanatory unification and the causal structure of the world", en Philip Kitcher & Wesley Salmon (eds.), *Scientific Explanation*, Minneapolis, University of Minnesota Press, 1989, 410-505.

9 M. Steiner, "Mathematical explanation", en *Philosophical Studies* 34 (1978) 135-151.

10 Sobre esto, puede verse la tercera parte de P. Mancosu, *Infinito, lógica, geometría*, London, College Publications, 2020. (Cuadernos de lógica, epistemología y lenguaje, Volumen 14).

11 R. Dedekind, *¿Qué son y para qué sirven los números*?, Madrid, Alianza, 2014 [1888].

12 G. Peano, *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Oviedo, Pentalfa, 1979 [1889].

13 Tenía un enfoque restrictivo de la aritmética como mero arte de cálculo (*Rechen-Kunst*), como puede verse en la carta a Schultz, 25 Nov. 1788 (I. Kant," Carta a Johann Schultz del 25 de noviembre de 1788", trad. R. Rovira et al., en *Logos. Anales del Seminario de Metafísica* vol. 37 (2004) 49-53). Agradezco a Abel Lassalle Casanave aclaraciones y comentarios sobre este punto.

14 La geometría tiene axiomas, pero no así la aritmética: "no hay axiomas propiamente dichos, si bien algunas de estas proposiciones son sintéticas e inmediatamente ciertas (*indemonstrabilia*)." (I. Kant. *Crítica de la razón pura*. Madrid, Alfaguara, 1978, B 204-205 A 164).

"Aritmética superior", una verdadera teoría ("divina ciencia", dice) a la que nosotros nos referimos como Teoría de Números[15].

Entre el siglo XVIII y el XIX encontramos una sucesión ininterrumpida de textos que ofrecían una presentación de la aritmética sin axiomas, incluyendo obras de referencia como las de M. Ohm y de Grassmann. Las generaciones de estos autores, y sobre todo las de Dedekind y Peano, contribuyeron a cambiar de manera muy profunda la concepción de la aritmética. Para ello, resaltaron leyes generales como las de asociatividad, conmutatividad, etc., y adoptaron una aproximación teórica al tema en la que tuvo un papel estelar la inducción matemática. Entre los planteamientos que había antes del nacimiento de Gauss (Wolff, etc.) y los posteriores a su muerte, hay un abismo.

Ya Grassmann (en su manual de 1861, importante para Peano)[16] dio el paso de emplear sistemáticamente el RIM para fundar todo el cuerpo teórico de la aritmética. Esto vino acompañado del recurso también sistemático a las definiciones recursivas[17], lo cual de nuevo es señal del enfoque mucho más teórico. Se da la circunstancia algo extraña de que Grassmann *utiliza* la inducción de manera muy precisa, pero no *formula* un principio de inducción; punto que Peano corrigió oportunamente[18]. En cuanto a Dedekind, no solamente formula el principio de inducción, sino que lo demuestra sobre la base de una caracterización conjuntista de la estructura de **N**[19], y ofrece también una justificación precisa de las definiciones recursivas por medio de un potente teorema.

Difícil pues encontrar un ejemplo más claro de unificación y sistematización, que en obras como las de Grassmann, Peano y Dedekind, con su recurso sistemático a las definiciones recursivas y la demostración inductiva. Si explicar en matemáticas tiene que ver con esas formas de unificación, no hay duda de que estos autores propusieron una verdadera explicación de los fundamentos de la aritmética.

15 C. F. Gauss, *Disq. Arithm,* Lipsiae, In commiss. apud Gerh. Fleischer, 1801, 3-4.

16 H. G. Grassmann, *Lehrbuch der Arithmetik*, Berlin, Verlag von T.C.F. Enslin, 1861.

17 La definición recursiva de la suma es: $n + 1 = n'$; $n + m' = (n + m)'$; donde se presupone la *función sucesor*, notando el sucesor de n como n'. El producto se define recursivamente así: $n \cdot 1 = n$; $n \cdot m' = (n \cdot m) + n$.
Con esto queda bien definida tanto la suma como el producto de dos números cualesquiera.

18 Quizá esto tiene algo que ver con que la presentación de Grassmann resalta solamente definiciones (*Erklärungen*) y en ella no aparece ningún axioma (ni el axioma de inducción completa, ni tampoco el axioma de completud cuando trata de los números reales).

19 En su sistema, el principio clave es una condición basada en la *teoría de cadenas* (**N** es la cadena de un conjunto unitario bajo la aplicación sucesor, $\mathbf{N} = \{1\}_0$); sobre esa base demuestra el Teorema de inducción completa. Cabe pensar en una versión alternativa, por ejemplo utilizando el principio del *menor número* como axioma: dado un conjunto de números no vacío, tiene un menor elemento (o en otros términos, dada una propiedad de números, de extensión no vacía, hay un primer número que la satisface).

Conviene resaltar un punto interesante. Las demostraciones por inducción de tiempos anteriores (ver Anexo 1) daban por sabida la aritmética elemental, y buscaban probar resultados más avanzados, de teoría de números o por ejemplo sobre el triángulo aritmético (llamado de Pascal). Con Dedekind, tenemos una auténtica "profundización de los fundamentos" en el sentido de Hilbert: el RIM se convierte en la clave de bóveda, pero en todo el librito de Dedekind no se demuestra ni un solo teorema avanzado[20]; lo único que se justifica, con todo rigor, son teoremas elementales acerca de lo finito y lo infinito, números ordinales y cardinales, las operaciones aritméticas, el orden de los números, etc.

Vale la pena poner aquí un ejemplo de demostración por inducción en este nivel de los fundamentos del número. Con base en la definición recursiva de la suma:

[a.] $n + 1 = n'$ [b.] $n + m' = (n + m)'$;

vamos a dar una demostración de que la suma es asociativa. *Dados tres números cualesquiera* a, b, m, *se verifica que* (a + b) + m = a + (b + m). Como siempre, lo hacemos en dos pasos:

Base: hay que probar que (a + b) + 1 = a + (b + 1). Considerando el lado derecho, tenemos que a + (b + 1) = a + b′ [*usando* a.] = (a + b)′ [*usando* b.] = (a + b) + 1 [*usando* a.].

Paso inductivo: hay que probar que (a + b) + m′ = a + (b + m′), sobre el supuesto de que lo enunciado vale para m. Empleamos repetidamente [b.], salvo donde se indica, y tenemos: (a + b) + m′ = ((a + b) + m)′ = (a + (b + m))′ [*usando la "hipótesis"*] = a + (b + m)′ = a + (b + m′). Esto completa la demostración.

Desde luego, es muy probable que el lector no haya tenido la sensación de mejorar su comprensión de la asociatividad de la suma, al leer esta demostración. Pero si considera que se trata de solamente un ejemplo, entre cientos, de resultados fundamentales que son justificados de ese modo, inductivamente, quizá ello pueda afectar a su forma de comprender el edificio deductivo de la aritmética.

Se podría también discutir con bastante provecho el enfoque de Steiner sobre la explicación, en relación con estos trabajos modernos de axiomatización y fundamentación de la aritmética. Pero debe quedar para otra ocasión.

3. Un enfoque pragmatista

Avanzaba arriba que soy escéptico sobre el proyecto de caracterizar en qué consiste la 'explicatividad' de las demostraciones calificadas de explicativas. ¿Por qué no resulta plausible obtener una caracterización *formal general* de

[20] Para eso habría que ir a sus trabajos de teoría de números moderna, en especial sus *Lecciones* (*Vorlesungen* über *Zahlentheorie*) basadas en los cursos de Dirichlet.

tales demostraciones? Porque lo que llamamos explicación en ciencia –y también en matemáticas– es fuertemente dependiente del contexto. Contra las expectativas del empirismo lógico (Hempel, etc.), no hay una caracterización lógico-formal general de la "explicación" que recoja el espectro de situaciones en las que los científicos responden a preguntas de *por qué*[21].

Que algo resulte dependiente del contexto no quiere decir que sea arbitrario, ni tampoco subjetivo. Sí quiere decir que es relevante considerar en qué contexto se pregunta '¿por qué?': qué tipo de investigación se está realizando, cuál es la comunidad, cuál su nivel de conocimientos o su área de especialización; en el caso de evaluar demostraciones, con qué otras alternativas se está comparando, lo que sería la "clase de contraste"; y quizá otros factores. En el caso que nos ocupa, puede ser relevante por ejemplo que la clarificación aportada por un RIM no es la misma para una matemática experta (no digamos ya si es especialista en teoría de números) o para un aprendiz de filósofo de la matemática. Es muy posible que el artículo de Lange[22] resulte impactante para este último, pero sea juzgado superficial por la primera. O también: sin un cierto grado de habituación y experiencia previa, es posible que el objetivo de la demostración que hemos indicado en la página anterior resulte oscuro, y que también lo sea la forma en que se están aplicando las cláusulas [a.] y [b.] de la definición recursiva.

Si consideramos el teorema mencionado arriba, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2$, se han discutido bastante las virtudes de una demostración estrictamente inductiva, frente al tipo de argumento que ofrecieron ben Gershon y Gauss. Éste consiste en considerar que, dada la suma de n términos, el primero con el último suma n+1, y lo mismo suma el 2º con el penúltimo, el 3º con el antepenúltimo, etc. Tenemos entonces múltiples parejas de términos que suman n+1, y considerando cuántas parejas son, podemos justificar que la suma será precisamente = $n(n+1)/2$[23]. Este razonamiento es magnífico para *motivar el resultado* y hacer ver el porqué, motivo por el cual muchos lo han considerado más explicativo que la demostración por inducción[24].

Sin embargo, estrictamente hablando el razonamiento de ben Gershon es incompleto, ya que no termina de justificar la *generalización* del resultado a

[21] Lugar clásico para estas ideas es el libro de B. van Fraassen, *La imagen científica,* México, UNAM, 1996.

[22] M. Lange, "Aspects of Mathematical Explanation: Symmetry, Unity, and Salience", en *Philosophical Review* 123/ 4 (2014) 485-531.

[23] El razonamiento tiene que considerar si el número de términos n es par o impar, pero el lector puede analizar la situación por sí mismo. Por ello, Gersónides ofrecía dos demostraciones.

[24] Por ejemplo, G. Hanna, "Proofs that prove and proofs that explain", en *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. II, eds. G. Vergnaud, J. Rogalski, M. Artigue, Paris, Laboratoire PSYDEE, 1989, 45–51.

cualquier *n* (cosa que sí logra el RIM). En el lenguaje de Baldwin, hay aquí una tensión entre la claridad y la fiabilidad (o rigor)[25]. Una manera de completarlo sería, precisamente, añadir un argumento que justifique el paso inductivo, es decir, el carácter *hereditario* de la pauta que se advierte en los primeros ejemplos.

Si el razonamiento Gershon-Gauss no nos parece incompleto, es por razones de índole cognitiva. El argumento de las parejas nos presenta una pauta o patrón que nuestro sistema cognitivo capta y enseguida generaliza[26]. En realidad, la estrategia de presentar un patrón como ejemplar o paradigmático, cediendo al agente de conocimiento la tarea de comprender lo general que es dicho paradigma, y aplicarlo por analogía en otros casos, ha sido habitual en el desarrollo de las matemáticas en diferentes culturas. (Un ejemplo son los problemas-tipo que presentan los *Nueve Capítulos* de la tradición china antigua.) Reconocimiento de patrones, razonamiento por analogía, presentación de modelos paradigmáticos: tres formas fundamentales de pensamiento matemático, que sin embargo son *sustituidas* por algo más formal, explícito y riguroso al presentar un RIM.

A fin de cuentas, el objetivo de combinar la demostración con la explicación quizá se puede lograr mucho mejor, no mediante una única demostración, sino con una demostración acompañada de otras consideraciones. La demostración estricta por RIM se puede motivar mediante el argumento Gershon-Gauss, uniendo así claridad y rigor: el efecto es justamente el mismo que si complementamos el argumento de ben Gershon con un paso inductivo, tal como hemos sugerido antes. ¿Quién ha dicho que la explicación matemática se puede lograr únicamente *dentro* de una demostración? Quizá deberíamos investigar más el fenómeno de las demostraciones múltiples, y como una combinación de demostraciones puede contribuir a la comprensión.

Hay otro asunto que conviene también comentar. La demostración por inducción puede resultar opaca, muchas veces, cuando el paso inductivo se resuelve por medio de manipulaciones algebraicas. En la medida en que estemos siguiendo este tipo de manipulaciones de manera más bien mecánica, podemos perder de vista los objetivos de la prueba, podemos no estar comprendiendo. Eso se debe a una característica fundamental del álgebra, que ofrece tanto una ventaja como un inconveniente. El poder del álgebra reside, precisamente, en cómo el *cálculo reglado* hace posible lo que Leibniz llamaba

25 Hacer totalmente riguroso el argumento, presentando de manera más formal la idea de una adición *anádica* (sin un número fijo de sumandos) como es $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, no es trivial (J. Baldwin, *op. cit.* p. 73).

26 Ver F. Rivera, "The distributed nature of pattern generalization", en *PNA,* 9/3 (2015) 165-191.También pueden influir nuestros conocimientos previos, en especial el haber aprendido álgebra y por ello estar muy acostumbrados a trabajar con variables, e interpretar así la '*n*' del caso que discutimos.

una *cogitatio caeca* (pensamiento ciego)[27], sustituyendo el esfuerzo del pensar por la simple aplicación de reglas fijas de cálculo. Pero siempre es posible acompañar el cálculo 'ciego' mediante pensamientos reflexivos: Grassmann hablaba de tener a la vez desarrollo formal y desarrollo conceptual, yendo de la mano[28]. O bien, es posible someter a un análisis reflexivo la demostración ya terminada, tras haberla verificado mecánicamente, para *ver cuáles* son los pasos clave, cuál es el procedimiento que asegura la validez del resultado.

4. Conclusiones

Tradicionalmente, en obras de von Wright y otros, se ha contrapuesto la idea de explicación científica (basada en leyes o en causas) con la idea de comprensión social o histórica (basada en algo así como la identificación empática). En otro sentido diferente, sin embargo, puede argumentarse que hay una conexión estrecha entre la explicación y la comprensión (conceptual): esta idea es resaltada por algunas contribuciones recientes[29]. De hecho, Frans[30] parece coincidir con la idea que hemos resaltado aquí (sección 2) de la importancia de la sistematización y unificación como vehículo para promover el "explanatory understanding".

En este sentido, y contra intentos simplificadores, parece claro que se puede argumentar que los razonamientos por inducción matemática (RIM) son explicativos.

Ahora bien, cuando se apela a una noción con tintes cognitivos, como es la de comprensión, ello no hace sino resaltar los aspectos pragmáticos de la idea de explicación. Si aceptamos esta tesis, se deduce como corolario que no es razonable pensar que un único esquema lógico-formal (o dos, a lo sumo) pueda ser adecuado para todos aquellos argumentos que llamamos explicaciones. En este sentido, el proyecto tiene que considerarse obsoleto. Lo cual no es obstáculo para que alguno pueda considerar otro proyecto un tanto diferente: identificar una variedad de patrones explicativos (¿cuántos?) que puedan

[27] Sobre este tema, puede verse A. Lassalle Casanave (ed.), *Symbolic Knowledge from Leibniz to Husserl*, London, College Publications, 2012. (Cuadernos de lógica, epistemología y lenguaje, volumen 41)

[28] "Mathematics in its most rigorous form, in its inexorable consistency, is in a position to preserve the students from the fashionable rule of ingenious phrases, and to turn them to the practice of rigorous logical thinking. This aim would not be attained, however, if one wanted to present just formula after formula, without conceptual development. One must rather have both – formal development and conceptual development, going hand in hand". (H. G. Grassmann, *op. cit.,* p. vi).

[29] Por ej. M. Inglis, J.P. Mejía-Ramos, "Functional explanation in mathematics", en *Synthese* 198, suppl. 26 (2021) 6369-6392; J. Frans, "Unificatory understanding and explanatory proofs", *Found. Science* 26/4 (2021) 1105-1127.

[30] J. Frans, *op. cit*.

servir para clasificar una parte importante de aquellos argumentos que solemos calificar de "explicativos".

Austin le criticaba a Wittgenstein una cierta pereza, al afirmar que los juegos de lenguaje son "infinitos", sin plantearse una tarea de clasificación que podría ser ardua, pero finita al fin y al cabo. Aquí podemos pensar lo mismo: hacer inventario, aun si se acepta que los distintos tipos de explicaciones solo guarden entre sí parecidos de familia.

Más allá de esto, cada cual deberá decidir hasta qué punto el proyecto de clasificación de las explicaciones debe ser central a la filosofía de las matemá-ticas (o de las ciencias).

José Ferreirós
Departamento de Filosofía y Lógica y Filosofía de la Ciencia
Universidad de Sevilla
Facultad de Filosofía
C/ Camilo José Cela, s/n
41018 - Sevilla
Josef@us.es

Anexo 1. Hitos en la historia del razonamiento por inducción matemática:

1000 aprox. Al-Karaji describe cómo generar los coeficientes del binomio (usando el 'triángulo de Pascal', también llamado 'de Jayyam', o 'de Yang Hui' [31]) con una forma imperfecta de inducción; usa este tipo de argumenta para probar el resultado de la suma de los cubos, que ya conocía Aryabhata.

1150. Al-Samaw'al emplea razonamientos similares, también en conexión con los coeficientes del binomio (da el resultado para $n = 2$, y muestra algunos pasos inductivos).

1321. Levi ben Gerson escribe *Ma`ase Hoshev*, obra pionera en combinatoria y en el uso riguroso de la inducción.

1575. Francesco Maurolico, *Arithmeticorum Libri Duo*; prueba que la suma de los n primeros números impares es n^2.

1654. Blaise Pascal, en su *Traité du triangle arithmétique*, demuestra diecinueve de sus propiedades, y presenta con rigor el razonamiento por inducción matemática: resalta que se demuestra un número infinito de casos, probando simplemente "dos lemas".

Siglo XVIII. Varios autores emplean razonamientos por inducción en contextos de teoría de números, en particular Lagrange, y también Gauss en *Disquisitiones Arithmeticae.*

1861. Hermann Grassmann, *Lehrbuch der Arithmetik*, utiliza sistemáticamente las definiciones recursivas y la demostración por inducción.

1887. Richard Dedekind, ¿Qué son y para qué sirven los números?, ofrece una formalización y justificación general de la inducción, como también de las definiciones recursivas.

1894. Henri Poincaré propone que el razonamiento por inducción completa es el más característico del razonamiento matemático.

> Se podrían añadir algunos otros nombres, por supuesto, como los de Fermat, Wallis, Jacob Bernoulli, Lambert, De Morgan, Frege, Peano, Brouwer, Skolem.

[31] Lo que llamamos triàngulo "de Pascal" era conocido en China hacia 1261 de Yang Hui. En Persia fue llamado triángulo "de Khayyam", en Alemania o Italia "de Tartaglia"; fue conocido en España por la obra de Salinas en 1577. (Yang Hui atribuye el triángulo a Jia Xian, quien vivió en el sielo XI. Cf. J. Stillwell, *Mathematics and its History*, New York, Springer, 1989, p. 136).