Estudios Filosóficos LXXII (2023) 385 ~ 406

DE ENTES DE FICCIÓN Y EL HACER MATEMÁTICO

ON FICTIONAL ENTITIES AND MATHEMATICAL WORK

Javier de Lorenzo
Universidad de Valladolid

Une réalité complétement indépendante de l'esprit que la conçoit, la voit ou la sent, c'est une impossibilité. Un monde si extérieur que cela, si même il existait, nous serait à jamais inaccessible.

Ce n'est que par le Science et l'Art que valent les civilisations (J. H. Poincaré, *La valeur de la science)* [1]..

To me, pure mathematics is one of the highest forms of art (…) Mathematics is the only thing we know of that is capable of perfection; in thinking about it, we become Gods (Bertrand Russell, 1901, carta a un amigo americano).

Resumen: *De modo permanente se plantea la pregunta de si la Matemática se construye o se descubre. Desde mi enfoque el hacer matemático es una construcción conceptual del matemático. El resultado de esa construcción se plasma en escritura y su captación exige de una reconstrucción de quien lee. La construcción de ese mundo es análoga a la de los mundos de ficción que inventa el escritor y el poeta, o el mundo sonoro que crea el compositor musical. Los objetos, estructuras y teorías matemáticas llevan, en general, fecha y autor de su construcción. Se rechaza la idea de que el mundo que construyen los matemáticos exista con independencia de quienes lo construyen.*

Palabras clave: *hacer matemático, entes de ficción, escritura, niveles de lectura, invención, construcción conceptual.*

1 J. H. Poincaré, *La valeur de la science*, Paris, Flammarion, 1905, p. 9 y 275.

Abstract: ***The question of whether mathematics is constructed or discovered is constantly being asked. From my point of view, doing mathematics is a conceptual construction of the mathematician. The result of this construction takes the form of writing, and its understanding requires a reconstruction on the part of the reader. The construction of this world is analogous to the fictional worlds invented by the writer and the poet, or the sound world created by the musical composer. Mathematical objects, structures and theories generally bear the date and author of their construction. The idea that the world constructed by mathematicians exists independently of those who construct it is rejected.***

Keywords: ***mathematical doing, fictional entities, writing, reading levels, invention, conceptual construction.***

1. En un poema escrito por Rafael Alberti en 1924 se lee

> Si Garcilaso volviera,
> yo sería su escudero;
> que buen caballero era.

Es la primera estrofa y, en cuanto a su forma poética, creo que no se alteraría si se hace el siguiente cambio:

> Si don Quijote volviera,
> yo sería su escudero;
> que buen caballero era.

De Garcilaso de la Vega conocemos que fue, entre otras cosas, un poeta que, junto a su amigo Boscán, incorpora al idioma español formas métricas italianas claves para la poesía; también sabemos que murió en combate en Muy, Francia, sirviendo al ejército del emperador Carlos I de España. De don Quijote sabemos que fue, entre otras cosas, un hidalgo que recorrió media España, lanceando en alguna ocasión molinos de viento; también que murió en su pueblo de la Mancha, en su lecho, con dolorido sentir.

¿Cómo sabemos las historias y andanzas de uno y otro? ¿En qué se diferencian? A esto último la contestación parece ser inmediata y clara: Garcilaso de la Vega fue persona de carne y hueso, como atestiguan sus poesías y los escritos de los historiadores de la literatura española. Don Quijote es un personaje de ficción creado por el escritor Miguel de Cervantes en su novela *El ingenioso Hidalgo Don Quijote de la Mancha,* publicada en 1605 la primera parte y en 1616 la segunda; ente de ficción de parte de cuya vida se da buena información por su creador Cervantes.

Si seguimos para completar y concluir el poema de Alberti el personaje es tratado únicamente como guerrero, con su armadura y, por lo dicho antes, necesitado de un escudero:

Mi traje de marinero
se trocaría en guerrera
ante el brillar de su acero;
que buen caballero era.
Qué dulce oírle, guerrero,
al borde de su estribera.

El poema se muestra válido tanto para Garcilaso como para don Quijote, con una identificación, por la referencia a caballero con su armadura, aún mayor para ambos. Sin embargo, el cambio de nombre provoca que en su lectura se manifieste una diferencia existencial en la cual uno de los personajes se estima de carne y hueso y el otro de ficción, a pesar de que en ambos casos lo que sabemos nos viene dado por el mismo medio: la escritura, ya que jamás podremos percibirlos sensorialmente. Es a través de la escritura como sabemos de la existencia de Garcilaso, de don Quijote. A través de la escritura –acompañada por la imprenta– llegamos a saber de la existencia de personajes de carne y hueso lejanos en el tiempo y el espacio, así como de los mitos y de los entes de ficción creados por los escritores de todos los tiempos.

Escritura como medio para la fijación de un mundo como el de los entes de ficción al igual que para la historia de personajes de carne y hueso. Es el medio que se ha mantenido hasta la aparición de los artefactos de captación sonora y de imagen. Hasta esa aparición, que engendra nuevos problemas en cuanto a sus posibilidades de construcción de realidades virtuales, de nuevos entes y a veces no solo de ficción, ha sido la escritura el medio para saber tanto de Garcilaso y semejantes como de don Quijote y semejantes. Desde la lectura se aprenden las circunstancias y se captan las diferencias existenciales entre unos y otros personajes, entre unos y otros entes.

Lectura que no es algo pasivo porque toda lectura supone una acción en la que se pueden distinguir distintas formas, como señaló lúcidamente Pedro Laín Entralgo en su ensayo "Coloquio de los perros. Soliloquio de Cervantes" de marzo de 1947 en *La aventura de leer*[2]. Laín Entralgo indica que esas formas de leer son, en principio: *aprender* en el sentido de incorporar, quien lee, las noticias de lo leído; *formarse* en el sentido de aprehender la forma espiritual de lo leído, como cuando se lee a Platón; *afirmarse*, que supone que quien lee mantiene su opinión frente a lo contenido y manifestado en el texto; *enajenarse*, que entraña "perderse en el mundo creado por el autor" en palabras de Laín Entralgo, identificarse con el personaje leído como ocurre al hidalgo

2 Pedro Laín Entralgom *La aventura de leer,* col. Austral, Madrid, Espasa-Calpe, 1964[2], pp. 134-158.

Alonso Quijano con la lectura de los libros de caballerías que le llevan a convertirse en el caballero andante don Quijote o a los jóvenes que se suicidaban con el libro *Las cuitas del joven Werther* de Goethe en el bolsillo para resaltar así su identificación con el personaje.

2. Dejando a un lado esos mundos –de ficción, de historia literaria–, me centro en la mesa en la que escribo. Se me muestra como un cuerpo rígido que cuesta mover, con su forma de camilla. Sobre ella, otros cuerpos considerados rígidos con su volumen, peso y forma propios, aunque más ligeros que la mesa sobre la que se encuentran: son libros; también hay papeles, relojes… Cuerpos que, frente a los entes de ficción literarios, por ejemplo, capto sensorialmente por la vista, el tacto… y, desde esa captación, les atribuyo una existencia independiente y ajena, extraña, a mi persona. Existencia de objetos más o menos rígidos que componen lo que calificar de "realidad"; una realidad que se mantiene como tal aunque salga de la habitación y deje de captar lo que en ella se encuentra: estoy seguro de que al volver se hallarán como los dejé. Creencia igual para los libros que percibo delante de mí, en las estanterías que cubren las paredes, libros en los cuales no solo leo sino anoto, subrayo… Una existencia relacionada, siempre, con mi persona aunque les atribuya una existencia autónoma.

Por otro lado, y desde lo conceptual, la Mecánica cuántica nos dice que lo que he denominado realidad, no es tal, sino algo totalmente ilusorio. Como Eddington expresó magníficamente en *La naturaleza del mundo físico*[3], la vida familiar no es más que una representación de sombras chinescas. Porque la mesa que considero un cuerpo rígido, un sólido que puedo romper con un hacha por modo casi único, realmente es un fantasma de mesa, una sombra chinesca o más bien un espacio casi vacío con unas cuantas partículas elementales enlazadas por unas fuerzas electromagnéticas. Al igual que los demás cuerpos que considero rígidos, como los libros, el bolígrafo con el que escribo, el lápiz con el que subrayo líneas o párrafos en esos libros, mi mano con la que manejo bolígrafo y lápiz, mi cuerpo, se muestran como meras sombras chinescas.

El mundo de partículas elementales, de fuerzas electromagnéticas que ligan o relacionan esas partículas, al igual que los entes de ficción no se capta sensorialmente como sí captamos los cuerpos que creemos rígidos de nuestro entorno, como la mesa en la que escribo. El mundo cuántico constituye una "realidad" diferente, lo que algunos físicos consideran *la auténtica realidad*. Sabemos de su existencia a través de la escritura compuesta de un lenguaje matemático con una interpretación física, aunque, en este caso, ese conocimiento viene apoyado por una tecnología que permite observar las trazas de las partículas en unos laboratorios con la obtención de consecuencias para la investigación y el conocimiento científicos, así como pragmáticas para la vida ordinaria.

[3] A. S. Eddington, *La naturaleza del mundo físico,* Buenos Aires, Ed. Sudamericana, 1952[2].

Aunque no captemos jamás un quark, unas partículas elementales, estas no son entes de ficción como lo son don Quijote, el joven Werther o Raskólnikov. Su existencia "real" viene establecida por la formulación matemática con su interpretación física avalada por experimentos que pueden tardar años en corroborar esa existencia "real".

Un ejemplo muy cercano: las partículas que se denominaron fotones se obtuvieron mediante un proceso matemático-físico y su existencia se mostró experimentalmente después. Cuando al llegar a un hospital, a un supermercado, a un hotel la puerta se abre sin más que aproximarse a ella, no es porque seamos unos magos, sino por la aplicación del efecto fotoeléctrico, que es el que provoca dicha apertura. No percibimos, ni percibiremos los fotones, pero sí una consecuencia de su existencia.

Lo que tenemos es un mundo de cuerpos considerados rígidos, de artefactos fabricados, construidos por el hombre mediante el manejo y la transformación de otros cuerpos considerados también rígidos. Artefactos o cuerpos que captamos a través de nuestros sentidos como la mesa en la que escribo, los libros que sobre ella se encuentran. Es un mundo en el que hay que integrar a personajes de carne y hueso, como Garcilaso, Tiziano, Mozart o Schubert, de los que sabemos de su existencia a través de sus obras escritas, pintadas o sonoras.

Es el mundo de la "realidad" de nuestro entorno en el que vivimos, sufrimos, leemos, interpretamos, modificamos el entorno, morimos. Es desde esta "realidad", desde este mundo, aunque sea una ficción desde la Mecánica cuántica, desde el que se han ido construyendo, fabricando los artefactos con sus interrelaciones asociadas en los cuales nos encontramos inmersos, pero también se han ido construyendo otros mundos como el de ficción o el del conocimiento. En este último, y en particular, se ha construido la Mecánica cuántica desde la que aprendemos lo "irreal" que es lo "real" del entorno en el que nos encontramos y del que formamos parte.

El mundo de ficción, que se capta mediante la lectura, no solo permite una cierta enajenación o identificación con el personaje leído, sino que se puede invertir en algunos casos el proceso de atribuciones existenciales. En cierto sentido, un personaje de ficción como don Quijote provoca la existencia de Cervantes como escritor y, de modo inmediato, como personaje de carne y hueso y no de ficción; o Hamlet la de Shakespeare, el joven Werther la de Goethe… Es un mundo al que incorporo el musical y el artístico.

En el mundo de artefactos en el que vivimos, la lectura se ha ido sustituyendo por la contemplación de la imagen en la pantalla de televisión, de cine, del móvil… Los papeles de lectura que sugiere Laín Entralgo, aceptables con sus matizaciones, siguen siendo los mismos en estos terrenos: incluso la identificación con los personajes que aparecen en la pantalla, la asimilación de comportamientos y hasta de vestiduras se han hecho más acentuados que en el caso de la lectura. La necesaria acción de lectura, el distanciamiento que supone, se desvanece en beneficio de la integración, donde la simple contemplación más o menos pasiva es lo que prevalece.

En el mundo "real" de nuestro entorno se ha construido, junto al tecnológico, junto al de ficción, el del conocimiento. Desde la construcción de la Mecánica clásica en los siglos XVI y XVII, con su posterior unión con la tecnología, el mundo real se ha visto transformado radicalmente y se puede afirmar que hoy día vivimos en un mundo de artefactos; Mecánica clásica como disciplina que se centró, básicamente, en el estudio del movimiento de los cuerpos considerados rígidos. Junto a esa Mecánica se ha construido la cuántica desde la que lo "real" de nuestro entorno es mera ilusión, un mundo de ficción. Mecánica cuántica que desde su íntima unión con lo tecnológico interactúa en nuestra vida a través de las aplicaciones tecnológicas que se cifran, hoy día, en al menos el 30 % de los artefactos tecnológicos que manejamos.

3. En el mundo de lo "real" de nuestro entorno se ha construido, en paralelo al de los entes de ficción literarios y simbólicos, al del conocimiento científico de las diferentes mecánicas, al de artefactos materiales, el mundo matemático. Un mundo que muestra multitud de imágenes, como he intentado mostrar en otros lugares. No es mundo que podamos captar como captamos los artefactos materiales que nos rodean, porque lo que se construye en el mundo matemático son elementos conceptuales y, básicamente, sus interrelaciones.

Es un mundo nada estático o construido de una vez por todas, porque se encuentra en permanentes cambios y transformaciones desde una primera construcción de cada campo y temas en su interior. Actualmente se encuentra escindido académicamente en disciplinas como Análisis, Geometría, Álgebra, Aritmética o Teoría de Números, Topología, Cálculo de probabilidades y Estadística, Computabilidad, que componen, realmente, un ecosistema propio, específico. Campos que, a pesar de la especialización que conllevan, permiten la construcción de enlaces, interrelaciones fecundas como ha puesto de relieve el último premio Abel, de 2022, Dennis Sullivan, enlazando álgebra y geometría con topología y, a la vez, tratando de sistemas dinámicos que se ligan con temas como la teoría del caos; o uno de los premios Fields también de 2022, el coreano-americano June Huhn, premiado por unir la geometría algebraica con la combinatoria creando nuevos enfoques en el hacer matemático; o, más radicalmente, con el programa De Robert Langlands. La interdisciplinaridad se muestra clave en la creatividad del hacer matemático actual.

A su vez esos campos enlazan con los terrenos de otras ciencias, especialmente con la Física o la Física Teórica de partículas, como se puso de manifiesto en el trabajo de Atiyah (premio Fields 1966) y Singer, en su Teorema del Índice, que les valió el segundo premio Abel concedido en 2004.

4. El ecosistema conceptual propio del hacer matemático se *plasma* fundamentalmente en la escritura, al igual que ocurre con el mundo de los entes de ficción. En el caso matemático, si en su transmisión hay oralidad, como en la enseñanza o en la conferencia, se impone la conjunción de "palabra hablada" con "tiza y pizarra" o, en el día de hoy, con pantalla digitalizada. En ambos casos, el hacer matemático se ha terminado plasmando en un lenguaje ideográfico, autónomo, formado por una mezcla del lenguaje ordinario más un vocabulario de signos específico que constituye un instrumento esencial para la fijación y la difusión de ese hacer. Lenguaje ideográfico que se hace realmente imposible de leer frente a un poema como el de Alberti; el discurso matemático se ha hecho cada vez menos "hablado".

El lenguaje "matemático" ha ido variando al igual que el contenido y los modos de hacer que se manifiestan en muy distintos estilos a lo largo de la breve historia de la humanidad. No es lo mismo el estilo poético de los matemáticos hindúes como Aryabhata que el estilo císico de los inicios del Renacimiento europeo, ni el de las escrituras simbólicas que se conforman a partir del siglo XVII.

Es en la escritura en la que toman cuerpo las entidades matemáticas y sus propiedades, las relaciones o funciones, las teorías, el universo matemático. Cuando se hace una exposición oral se hace básico el manejo de tiza y encerado, se hace básica la acción de escribir, de la cual la expresión oral es siempre una acompañante, aunque necesaria. Parte del vocabulario de ese lenguaje se ha hecho común a todos los matemáticos del mundo y se puede afirmar que, de momento, es un lenguaje universal al que se han agregado los propios de la computación.

Hay que hacer unas precisiones: desde finales del siglo XIX una cosa es cómo se piensa el hacer matemático y otra cómo se plasma en escritura. Al tratar de expresar el pensamiento en escritura, el énfasis se centra en el ideograma, los símbolos, el formalismo, por lo cual queda muy desdibujado, por no decir eliminado, el matemático que ha realizado la construcción. En el ensayo escrito para ser publicado, la comunicación se intenta lo más formal posible, sin indicar el proceso que ha conducido al resultado del que se da cuenta en el ensayo, que se quiere, en principio, completo.

Por ese intento de expresión que lleva a considerar que el escrito es algo surgido sin sujeto cognoscente es por lo que ha producido cierta sorpresa en algunos medios que un matemático como Cédric Villani, tras obtener el premio Fields en 2010, publicara el libro *Thèoréme vivant* (2012, traducido al español por *Cómo nace un teorema*). En él expone su hacer de matemático día a día, sus esfuerzos, fracasos, ilusiones, sus intercambios epistolares con su discípulo y aquí colaborador Mouhot, sus viajes, sus charlas con otros matemáticos, las músicas que escucha mientras trabaja de madrugada… hasta que al cabo de tres años de hacer ininterrumpidos, y de modo súbito, *ve* cómo realizar las demostraciones anheladas. Demostraciones que redacta, que plasma en un ensayo rechazado por la revista en una primera entrega y admitido tras la revisión exigida por los evaluadores y que ocupa casi doscientas páginas. Demostraciones, con todo lo que conllevan de nuevas ideas, nuevos teoremas, nuevas analogías, por la que se le concede la medalla Fields. Este libro es la manifestación más clara realizada por un matemático de cómo lleva a cabo día a día su hacer, es la manifestación más clara hasta hoy de cómo es una matemática viva.

En la misma línea, y frente al intento de mostrar el hacer matemático no como se hace sino solo como se plasma lo más formalmente posible, se tienen casos como el de Hisuke Hironaka quien, en un curso dado en Seul, fue exponiendo lo que iba logrando día a día, sus ensayos, sus errores, sus aciertos; exponiendo la investigación que iba haciendo. Es lo que condujo a June Huhn, ante lo que calificó de "mi primera exposición a la matemática como actividad humana", a cambiar de poeta o periodista científico a matemático y a obtener la medalla Fields de 2022, como ya antes la obtuviera Hironaka en 1970.

En cualquier caso la formalización escrita –que nunca será completa como exigiría un formalista sintáctico a ultranza, y que equivaldría a que un alpinista buscase el punto de apoyo mediante un microscopio electrónico, con metáfora de Roger Godement en su libro Álgebra– es un instrumento de control, de previsión y, a la vez, un instrumento de inteligibilidad que permite la captación de los conceptos encerrados en esa formalización. Igualmente permite que se llegue a asegurar que un teorema está bien demostrado, sin errores, por un intento de llevarlo a un proceso de ordenador en el cual, y con los llamados asistentes de demostración, se pueda llegar a verificar ese teorema.

Desde finales del siglo XX se han introducido en el ecosistema, en el universo matemático, dos intrusos. En 1976, apoyados en la potencia de las calculadoras, se realizó la demostración del teorema de los cuatro colores. Desde esta fecha el ordenador ha invadido el hacer matemático en un salto cualitativo. Para un matemático como Peter Lax, premio Abel 2005, el papel del computador "es comparable al papel de los telescopios en astronomía y los microscopios en biología".

El manejo del ordenador ha vuelto a plantear el estatuto de la demostración matemática y ha hecho ver con mayor claridad que la demostración "normal" tiene un carácter epistemológico imprescindible, no reducible a mera derivación sintáctica y a plantear si unos cómputos, imposibles de seguir manualmente, constituyen auténtica demostración.

El ordenador se ha quedado para ampliar tanto la potencia de cálculo como para avalar demostraciones ya realizadas mediante los llamados "asistentes de demostración", y para probar conjeturas que requieren cómputos imposibles de llevar a cabo manualmente y que, de otra manera, permanecerían como conjeturas, aunque sea imposible la comprobación de los cómputos con lápiz y papel.

Junto a este intruso, que surge en los últimos años del siglo XX, los comienzos del siglo XXI han visto la aparición de otro intruso: internet. Internet ha posibilitado una comunicación más rápida y fluida entre los matemáticos de todo el mundo, porque no se tiene que esperar ni a madurar lo pensado ni a los árbitros o evaluadores correspondientes a los que se someten, en la actualidad, todos los ensayos para su posible publicación. La transmisión es inmediata y universal, sin fronteras; una comunicación que se realiza en unos lenguajes universales accesibles para todos y que conduce a la realización de lo que cabría considerar experimentos que exigirán, posteriormente, las demostraciones correspondientes. El intercambio electrónico provoca un hacer con su propio estilo matemático.

5. El mundo conceptual matemático se *capta* básicamente por la lectura del texto matemático, además de unos primeros momentos de oralidad en las clases correspondientes, en las conferencias, los seminarios.

Que se plasme en lenguaje escrito llevó a Poincaré a afirmar que la Matemática es un lenguaje bien hecho. Naturalmente lenguaje no en sí, sino en relación a quien lo lee y maneja, como lo expresado en ese lenguaje que trata fundamentalmente de relaciones, y no solo de entes. Afirmación que no entraña psicologismo alguno, sino un hecho objetivo. En los primeros años del siglo XX predominó una línea apoyada en la Filosofía del lenguaje. Quedarse en la acepción de que la Filosofía de la Ciencia es, realmente, filosofía del lenguaje científico llevó a Russell, por ejemplo, a mantener que en la inducción completa cuando se tiene P(1) y se pasa a la demostración expresada en P(n), no hay generalización sino simplemente dos expresiones lingüísticas del mismo nivel. Sostener que aquí se tiene una generalización, como pretende Poincaré, es para Russell mero psicologismo, mera ilusión.

Frente a Russell hay que decir que no basta indicar que la inducción completa, por ejemplo, es la definición de número natural y que número natural es aquel sobre el que se aplica la inducción si no se capta e integra esa definición, esa posible aplicación. No basta quedarse en las manchas de tinta en las cuales se materializa el lenguaje, sea el matemático o el de los entes de ficción simbólicos o literarios. Hay que captar, hay que aprender no ya a leer sino a interpretar, a integrar lo que se lee. El lenguaje matemático es un lenguaje universal para los matemáticos en el sentido de que su dominio manifiesta la pertenencia de quien lo domina a una determinada comunidad, lo mismo que el lenguaje ordinario al que accedemos desde el nacimiento condiciona de alguna manera nuestra futura forma de vida.

El dominio de ese lenguaje exige de los cuatro tipos de lectura que enuncia Laín Entralgo, imprescindibles tanto para informarse como para formarse, en todos los ámbitos. A esos cuatro tipos hay que agregar un quinto: el papel de las sugerencias, de las interpretaciones que conducen a plantear nuevos problemas con sus procesos de resolución, así como el de analogía con otros campos, que son esenciales para la construcción matemática. He mencionado el papel de la interdisciplinaridad en el hacer matemático y citado simplemente los casos de Sullivan y de Huhn enlazando campos muy diversos en apariencia entre sí, y lo mismo ha hecho Cédric Villani en su obra; lo que han ido haciendo todos los matemáticos creadores.

En la lectura, el poder de los conceptos que encierran los símbolos, no ya el signo escrito, permite potenciar, pero a la vez precisar, la intuición. En esa lectura hay que captar lo que contiene el texto, ciertamente, pero hay que ir más allá de lo escrito.

Un más allá que se hace esencial en una cara del hacer matemático y es la formulación del problema que, en el intento de su resolución, obliga al lector a poner en marcha su imaginación, su capacidad de integración de lo leído. Junto al problema, la conjetura, la afirmación de un posible logro que hay que intentar, como en el problema, resolver mediante su demostración. Se hace presente que la lectura permite la reformulación de un problema, por ejemplo, su posible simplificación, su analogía con otros y su posible traducción, de manera que su solución sea más clara y "evidente".

Son formas que se plantean tanto en el aprendizaje como en la investigación y que muestran, con radical claridad, que la matemática es, en esencia, un hacer del matemático. Un hacer que es un trabajo que va más allá del trabajo rutinario, maquinal, porque exige no solo de unos conocimientos, sino de imaginación, intuición y, por supuesto, suerte.

Por otro lado, y en muchos casos, en la escritura no es raro encontrar expresiones como "es fácil ver", "se verifica fácilmente", "el lector comprobará". El matemático-autor está exigiendo al matemático-lector una colaboración estrecha, esencial en la narración del texto que ha de ser reconstruido por ese lector en una reconstrucción que, a veces, se hace realmente ardua y más cuando tras el enunciado de una proposición se ve ese "es fácil ver": en ocasiones, para echarse a temblar, porque obliga al lector a horas de trabajo hasta "ver" lo fácilmente expuesto. El matemático-autor no formaliza totalmente sus ideas cuando las expone en escritura sino que siempre pide al matemático-lector su colaboración. Incluso se va más allá como cuando Bourbaki en su Álgebra lineal escribe: "Dejamos al cuidado del lector la definición de un sistema proyectivo de anillos"[4].

[4] N. Bourbaki, Algèbre linéaire, Paris, Hermann, 1964, cap. II, p. 145.

En esta colaboración, hay ocasiones en las cuales el matemático-lector encuentra errores en el texto, aunque a veces es el autor el que los termina viendo, como en el caso de N. H. Abel cuando cree que ha resuelto algebraicamente la quíntica; enviado su escrito, y ante el silencio de Gauss, Abel encuentra su fallo, rectifica, y acierta. O con otro ejemplo un tanto extremo: el de Poincaré al recibir el premio del rey de Suecia al intentar resolver el problema de la estabilidad del Sistema Solar. Ante las dudas planteadas por el encargado de la impresión del ensayo, Poincaré ve que hay errores en su trabajo original, lo que provocó un desastre con solicitud de eliminar todos los ejemplares de la memoria, ya editada. Al rehacer esa memoria, Poincaré construye una nueva Mecánica celeste y abre nuevos campos de trabajo como el de la teoría de los sistemas dinámicos, con los primeros pasos de la teoría del caos. Afortunado error no visto en un primer momento por el matemático-creador y que, al intentar superarlo, consigue la construcción de nuevos campos de trabajo. Más reciente, el anuncio de Andrew Wiles el 23 de junio de 1993 en el que presenta su demostración del último teorema de Fermat, una prueba de unas doscientas páginas. Al analizar la demostración se encontró un error que obligó a corregir la memoria por una ruta algo diferente a la original para llegar a 1995, donde la demostración ha sido finalmente aceptada. Al no poder recibir la medalla Fields por haber superado los cuarenta años, Andre Wiles recibió diferentes honores y, en particular, la medalla Abel en 2016 por su contribución a la demostración del teorema de Fermat.

Es algo no tan infrecuente en contra de una de las imágenes que se tienen del hacer matemático al que se le ve como un hacer riguroso, siempre correcto, sin lagunas demostrativas, con definiciones totalmente precisas. De hecho, el error existe y su reconocimiento es uno de los elementos que se pueden considerar básicos para la construcción matemática. Con palabras de Grothendieck en *Récoltes et semilles*:

> El descubrimiento del error es uno de los momentos cruciales, un momento creador entre todos, en un trabajo total de descubrimiento… Es un momento en el que nuestro conocimiento de la cosa tanteada se renueva súbitamente.[5]

Se puede afirmar que el reconocimiento del error es un conocimiento renovado.

Por otro lado, hay que tener en cuenta que a lo largo del proceso constructivo se han tenido muy diferentes modos de hacer, de estilos, de construir la matemática. En cada época histórica se considera haber alcanzado un rigor que, en momentos posteriores, se considera incorrecto. Es preciso aceptar la

[5] A. Grothendieck, *Récoltes et semilles*. https://agrothendieck.github.io/divers/ReS.pdf

existencia de los distintos momentos de pretendida rigorización, como cuando Laplace suprime las imágenes geométricas del Análisis matemático para elaborar la Mecánica celeste. Nuevo intento de rigor por parte de Cauchy también en el análisis, porque considera que las definiciones anteriores eran imprecisas, y Abel le criticará de modo inmediato porque observa que Cauchy no ha logrado el rigor prometido: comete errores en sus demostraciones y, en concreto, no maneja adecuadamente los criterios de convergencia de series...

6. Cabe una doble pregunta: ¿qué es lo que se plasma en la escritura y qué es lo que se capta en su lectura y aprendizaje correspondiente? En otras palabras, ¿qué encuentra el matemático en los textos escritos, en el lenguaje ideográfico matemático?

Son las mismas preguntas que se pueden hacer respecto al mundo de ficción: ¿qué se plasma en la escritura? ¿Qué se capta en su lectura? Aunque hoy día en este mundo ha penetrado un intruso que casi desplaza a la escritura: un intruso, en forma de cine, de televisión, de móvil. Desde estos medios reemplaza la escritura por la oralidad y la imagen potenciando la enajenación de quien observa, de modo pasivo, la pantalla. De modo pasivo, porque se hace difícil el papel de la afirmación individual que se tiene en la lectura.

Se puede afirmar que lo que se encuentra en los escritos con los entes de ficción literarios es la sublimación de las fantasías, afectos, sentimientos de los ideales, pero también de las frustraciones de la humanidad, de cada uno de los lectores. Las obras de ficción literaria y simbólica expresan, en el fondo, lo más humano en sus distintas caras. Los hermanos Karamazov, Fabricio del Dongo, don Juan, Joseph K… son diferentes caras con las que el lector, en su captación a través de la lectura, llega a enajenarse.

En cuanto al hacer matemático, lo que se encuentra en la forma expresiva que predomina desde mediados del siglo XX, en lo que se puede calificar como forma expresiva Hilbert-bourbakista, es, por lo pronto, definiciones, postulados y axiomas, teoremas, demostraciones y algunas justificaciones que enlazan esos elementos, y algo que no se encuentra explícitamente escrito: unos modos de razonamiento que permitan aprehender lo que constituye, por ejemplo, un proceso demostrativo. Es lo mismo que en la ficción literaria cuando se indica "poema", como el citado de Rafael Alberti, en cuya lectura no se aprehende únicamente lo que dice y, sobre todo, cómo se dice, sino el contenido emocional que, por supuesto, no está explicitado.

Las definiciones, postulados, teoremas envuelven, por una parte, cuestiones acerca de objetos como los números, temas y diagramas geométricos, funtores…, y acerca de estructuras como grupos, cuerpos, topos, categorías… Por otra parte, unas acciones como la repetición o iteración de una acción, desplazamientos, procesos demostrativos. En otras palabras, lo que encuentra es, por un lado, cosas o entes conceptuales y sus relaciones; por otro, acciones que permiten realizar la construcción de esos entes y sus relaciones así como establecer sus propiedades. Esos entes o cosas conceptuales y sus relaciones le muestran una existencia, pero solo en el interior de unas teorías dadas que, a su vez, existen en un determinado contexto. Afirmar que la suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos es propio de la geometría métrica euclídea, es incorrecto en una geometría métrica no euclídea y carece de sentido en una geometría no métrica.

Desde esas construcciones conceptuales se hacen susceptibles unas consecuencias que a veces son más importantes que las propias construcciones; surgen sugerencias –muchas veces desde la polisemia de los conceptos que se manejan– para la construcción de nuevos conceptos que se podrían calificar, en un primer momento, de satélites, pero que cobrarán su papel independiente de modo inmediato. Es lo que muestra la fecundidad de lo conceptual con la posibilidad de plantear nuevos problemas, nuevas conjeturas y suposiciones, con la obligación siempre de unas acciones: las de resolver esos problemas, demostrar las conjeturas entrevistas.

En los intentos de resolución, de demostración van surgiendo nuevos conceptos, nuevos problemas y nuevas conjeturas que muestran sus dificultades pero que el instinto del matemático hace que encuentre analogías con otros campos que faciliten y, a la vez, potencien lo conjeturado, el problema intuido. Todo esto supone un hacer por el cual el campo conceptual se va ampliando, transformando y, a veces, surge una inversión epistemológica que provoca la aparición de todo un nuevo campo de trabajo. Por otro lado, y por el contrario, cuando unos conceptos muestran que su fecundidad va siendo cada vez menor lo que indican es que esos conceptos, la teoría de la que forman parte, van llegando al agotamiento.

Al realizar una de esas construcciones conceptuales surgen, como he indicado, elementos calificables de entes u objetos que se estructuran en diferentes niveles y han de ser manejados con sus diferentes procesos. Así, cuando a finales del siglo XIX aparece el problema de fundamentar el hacer matemático, para algunos matemáticos el número natural se considera el dato sobre el cual reconstruir toda la matemática, pero también aparece como auténtico problema, porque no hay una definición del mismo y, para algunos, hay que dar esa construcción desde otros ámbitos como el global.

7. Me detengo, por ello, en el número natural. Su construcción, y su polisemia asociada con sus distintos enfoques conceptuales, tiene una larga historia, por lo cual aquí solo hago un breve esbozo sin entrar a relatar y discutir su origen desde el primer contar de la especie humana ni todas las construcciones a las que ha dado lugar: supondría realizar una historia de todo el hacer matemático.

En el mundo griego, la unidad no es número sino lo que engendra los números que son únicamente los impares, los pares y los racionales. Un engendrar que supone que, junto a la unidad, se tiene siempre una acción: la de su repetir, reiterar, iterar o agregar esa unidad a cada número que se obtenga para obtener su sucesor, un agregar que no tiene límite. Proceso de iteración ilimitada como la de los pasos al andar. En el fondo, es admitir, por un lado, que no hay número en sí mismo, sino que todo número está siempre en función de ser engendrado, construido y, además, siempre en relación con otros, inmerso en la sucesión a la que pertenece; por otro, y aceptando las sugerencias de Dedekind, admitir la existencia de unas facultades cognitivas, de una potencia del espíritu, desde las cuales se van construyendo los números.

Número natural y reiteración que, de modo inmediato, hacen surgir otros elementos, como el de irracional, que provoca la escisión entre género aritmético y género geométrico; también el problema del infinito y su enlace y necesaria distinción con lo ilimitado y, a su vez, la distinción de ilimitación y finitud. Esto último mostrado con claridad en el ejemplo del lanzamiento reiterado de una flecha sobre la superficie terrestre atribuido a Arquitas de Tarento.

Frente a número como forma del mundo eidético a descubrir como propone Platón, Aristóteles sostendrá que el número natural se origina desde lo sensible porque es lo que se abstrae de las cosas; es desde las cosas de nuestro entorno sensible desde lo que tiene sentido considerar el número, porque Aristóteles estima que todas las cosas son numerables. Como en la vida ordinaria se realizan composiciones, agregaciones de cosas, lo que se tiene es la composición de los números correspondientes; una composición que conduce al concepto de reiteración con su acompañante inmediato, la ilimitación.

Para Aristóteles el número lo es, siempre, de algo físico a lo que numera, no existe separado de las cosas a las que numera y de las que el hombre las abstrae. De aquí que el número pueda ser muy grande por composición, por reiteración pero como no hay cosas infinitas, no podrá haber números infinitos. La reiteración o inducción solo alcanzará un infinito en potencia, es decir, se podrá pensar en una reiteración nunca acabada, pero no en el total al que esa reiteración conduciría, no cabe el infinito actual.

Junto al número, que por supuesto siempre es el natural y que dará origen a la Aritmética, se encuentra la magnitud continua, cuyo estudio da paso a la Geometría, en la cual se estudia "la recta física", pero no en tanto que física. Si para Aristóteles en la Aritmética se puede llegar a un infinito en potencia por composición, en la Geometría se puede llegar a ese infinito por división. Precisamente "ese infinito surge en el pensamiento cuando tiene que hacer la división y reducir el continuo sensible", como afirmará en *Física* III donde también sostiene que "todo infinito es por composición o división".

El infinito se hace problema fundamentalmente en la Física aristotélica, no en la matemática porque se parte de las cosas de nuestro entorno, de las cosas sensibles, de las cuales se abstraen los conceptos matemáticos. Desde este enfoque, y para Aristóteles, el matemático no maneja, para nada, el infinito sino que, en todo caso, maneja la reiteración ilimitada, el infinito potencial. En cuanto al infinito en acto, por no ser sustancia, cabe rechazarlo, en principio.

La idea de que la unidad no sea número, sino lo que engendra a los demás números, se mantiene en el mundo occidental en algunos sectores hasta bien entrado el siglo XVII. Por el contrario, los matemáticos hindúes, al menos desde el siglo XII, ya manejaban el 0 y el 1 como números, pero siempre como elementos no en sí, sino en relación a, en el sentido de permitir expresar los restantes números o expresar cantidades físicas determinadas. Como he indicado, en el mundo occidental serán las construcciones conceptuales ligadas con el comercio las que conduzcan a aceptar la unidad como número. No por ello, y dando la razón en este caso a Aristóteles, el matemático maneja el infinito: le basta la reiteración ilimitada que siempre será, en el fondo, finita. Al matemático le basta el infinito potencial.

Cuando Blas Pascal construye el método de inducción completa y lo plasma en su *Tratado del triángulo aritmético* en 1654, aunque editado por vez primera en 1665, se puede observar que utiliza la cláusula de cierre como aceptando el infinito actual, aunque su expresión parezca manejar el potencial. De hecho afirma:

> Aunque esta proposición tenga infinitos casos, daré una demostración corta suponiendo dos lemas.

Los dos lemas son la caracterización del método de inducción en sus dos primeras condiciones. Tras su enunciado, escribe:

> De donde se ve que es necesariamente en todas las bases, porque es en la segunda base por el primer lema; por lo cual por la segunda está en la tercera base, luego en la cuarta, y en el infinito[6].

Más adelante, y en otros teoremas acerca del triángulo aritmético, Pascal vuelve a la afirmación de que la propiedad demostrada se cumple para todos los triángulos aunque, de modo inmediato, lo expresa mediante la reiteración de que se cumple para el primero, se demuestra para el segundo, a continuación para el tercero y por tanto la cumple "el siguiente y así hasta el infinito".

Infinito como concepto satélite provocado por el concepto de número natural y las sucesiones que por iteración se pueden formar con él: de números

[6] B. Pascal, *Oeuvres complètes*, ed. de L. Lafuma, Paris, Du Seuil, 1963, p. 53.

impares, pares, triangulares, piramidales… que conforman diferentes sucesiones y que dan origen a nuevos conceptos. Reiteración, ilimitación, infinitos en potencia y acto, método de inducción completa, números irracionales, series y sus criterios de convergencia y, en el caso de la solución de algunas ecuaciones algebraicas como $x^2+1=0$, aceptar como número sus soluciones aunque bajo el nombre de imaginarias atribuido por Descartes.

8. A finales del siglo XIX se produce una inversión epistemológica con todas sus consecuencias en los planos ontológico y metodológico. Hasta ese momento, lo dado es el objeto y es la unión de los mismos lo que caracteriza un conjunto que lo contenga. Es a partir de las ovejas desde las que se llega al concepto de rebaño. Al intentar fundamentar la aritmética y con ella el resto de la matemática ya construida, evitando toda llamada a la gráfica, como se tenía en la construcción y manejo del plano complejo, por ejemplo, se pasa a manejar sistemas o clases de números como dados de antemano; se pasa a un hacer matemático global. Lo que se produce es una inversión en el modo de hacer la matemática; una inversión de todo el proceso constructivo de pensamiento que partía del objeto individual para hacerlo ahora desde el sistema como ya dado y compuesto, en principio, por números, para pasar, posteriormente, a objetos de naturaleza desconocida. Es una inversión ontológica, porque los elementos se convierten en meros datos en el interior de una estructura establecidos por sus relaciones internas.

Surgen nuevos conceptos como el de fundamentar, con expresión propia de la arquitectura; fundamentación de disciplinas ya construidas y no por construir, como sería más adecuado en el manejo del término arquitectónico. En la inversión, hay que partir desde nuevos conceptos comenzando por el de clase, conjunto, sistema. Dedekind manejará clases de números racionales como algo ya dado para construir su concepto de cortadura y con ella definir el número real que se venía manejando sin una pretendida caracterización precisa.

Hay que reconocer que, frente a esta idea globalizadora, el número natural se mostró como esencial y base para un enfoque como el de Kronecker quien, desde el número natural y por medios estrictamente finitos, mantuvo la posibilidad de construir todo el hacer matemático. Su posición, sostenida con duras polémicas contra Cantor, quedó arrinconada por la potencia que supuso el enfoque globalizador. Hoy día, sin embargo, hay cierta vuelta a alguno de los planteamientos de Kronecker por el enfoque computacional, claramente finitista.

Aceptar, en la línea elegida por Dedekind, como punto de partida la clase de números racionales para construir el concepto de número real, supone aceptar que contiene a la clase de números enteros y estos a la de los naturales, cada clase dada en su totalidad, lo que supone aceptar un infinito actual compuesto de conjuntos también infinitos en acto. Cada uno de los conjuntos –N, Z, Q– se reconstruye aceptando que posee infinitos elementos. El infinito en acto, el auténtico infinito, hace acto de presencia como un elemento clave en esta inversión epistemológica que provocan algunos matemáticos. Por la inversión mencionada ya no es el número natural la base de la fundamentación: ahora es el número natural el que precisa de una fundamentación, porque no basta decir que es la abstracción de algo sensible cuando lo que se tiene es la clase infinita dada en acto de todos los números y, después, buscar en ella alguno de esos números, en singular. Su fundamentación se intentará desde la lógica apoyada en la teoría de conjuntos.

Por otro lado, tomar la clase de números racionales como punto de partida supone aceptar su estructura como dada. Si en un primer momento este concepto de estructura aparece difuso, pronto cobrará un papel cada vez mayor para convertirse en el objeto básico del hacer matemático desde mediados del siglo XX en manos especialmente del bourbakismo...

Es lo que conduce a afirmar que, en cualquier caso, lo que importa en el hacer matemático, y no solo desde este hacer global, no es el objeto individual como el número π, salvo para instaurar "el día de la matemática" a nivel mundial apoyándose en la expresión de π=3,14 que, en el calendario, supone como mes el 3 que es marzo y como día el 14 de ese mes. Ciertamente a cada uno de estos objetos cabe la atribución de numerosas propiedades como en el caso de π al que, brevemente, se le puede atribuir ser irracional, trascendente, alcanzar millones de cifras en su desarrollo obtenidas claramente por ordenador. Pero lo más interesante no son esas propiedades, sino que ese número se maneja en muchísimos campos del hacer matemático y siempre en enlace, en relación con otros elementos. Objetos individuales son π, e, $\sqrt{-1}$=i, 0, 1, 2… pero también los son un grupo de automorfismos, un espacio vectorial, una función, el cuerpo Q de los racionales… según el tipo de hacer matemático figural o global que se esté manejando en cada momento.

Lo que importa tanto en el hacer matemático como en el intento de captar el entorno en el que vivimos, en captar la "realidad", son las relaciones entre los objetos y no los objetos en sí.

9. Alguna de las construcciones conceptuales matemáticas que he citado ha ido con fecha y autor de construcción. En general, casi todas las construcciones matemáticas tienen fecha y autor de construcción. No solo se acepta el nombre de "función de Abel" o "grupos de Galois", sino que se acepta el nombre para grandes áreas como el Análisis diferencial e integral, las geometrías descriptiva y proyectiva: llevan el nombre de sus constructores, sean Leibniz y Newton, Monge o Poncelet, respectivamente.

Atribución de nombre y fecha de construcción que, en ocasiones, no ha sido muy afortunada, pero que, no por ello, deja de ser constitutiva del lenguaje matemático. Hay casos en los que se atribuye a un único autor la construcción de todo un campo, como en el caso de la teoría de conjuntos que se liga de manera exclusiva a George Cantor, olvidando el papel fundamental de matemáticos como, en especial, el de Richard Dedekind o el de Paul du Bois-Raymond o, más esencial, olvidando que lo que realmente se produce es una inversión epistemológica en la que participan casi todos los matemáticos de finales del siglo XIX y que al pasar de un hacer figural a uno global provoca lo que algunos han considerado, erróneamente, como una crisis del hacer matemático calificada de crisis de fundamentos. O, más en concreto, la demostración de un teorema se atribuye a un autor cuando esa demostración había sido hecha años antes por otro matemático.

En este sentido se tiene un paralelo con el mundo de ficción literario y artístico. Las creaciones literarias, sus personajes, como las composiciones musicales, tienen fecha y nombre de su creador, aunque en este caso esa atribución venga avalada hoy día por lo que se denominan "derechos de autor". Mundos de ficción que han tenido sus cambios en las formas expresivas y, en su caso, en la construcción de nuevos instrumentos o artefactos musicales.

A pesar de estas atribuciones se ha tenido la tentación de considerar que el ecosistema matemático posee una "realidad" que va más allá de la que atribuimos al mundo en el que vivimos y desde el cual se construyen las fantasías literarias con sus entes de ficción o el mundo de artefactos en el que estamos inmersos. En particular al mundo, al ecosistema matemático, algún pensador le atribuye una realidad más dura que la atribuible a esta mesa en la que escribo; un mundo eidético de formas matemáticas que espera a ser descubierto. Que una aplicación entre dos conjuntos se descomponga en tres aplicaciones: suprayección seguida por biyección y finalmente inyección entre los dos conjuntos, es una proposición que, demostrada, se muestra como más dura y fuerte que la mesa, ya que esta la puedo partir con el hacha y deja de ser mesa; pero esa proposición, como enfrentada al sujeto que la estudia y aprende, se muestra más fuerte que la mesa porque no hay forma de destruirla. Al tener que aprenderla puede parecer que esa proposición pertenece a un mundo eidético enfrentado con quien la va conociendo. Una sensación que también es atribuible a la existencia de los entes de ficción literaria como Joseph K o los hermanos Karamazov.

Que unos conceptos permitan, en su aprehensión, que aparezcan otros hasta ese momento desconocidos –como los números imaginarios o complejos al resolver una ecuación–, hace plausible pensar que esos nuevos conceptos no se acaban de construir sino, más bien, acaban de ser descubiertos. Es ignorar la potencia constructiva de lo conceptual que hace aparecer lo que he calificado de concepto satélite.

Desde esta posición se tendría que aceptar, por ejemplo, que a N.H. Abel no se le ocurrió invertir el problema de la resolución de la quíntica o invertir la integral tras duro esfuerzo y varias tentativas, sino que esas tentativas le llevaron a descubrir tanto el modo de inversión como la resolución de un problema algebraico, el planteamiento y solución de unas integrales y de unas funciones; resultados que estaban esperando en ese mundo eidético a que alguien los descubriera, en este caso Abel. Lo mismo para Evariste Galois, al que no se le tendría que atribuir la construcción de las proposiciones que enuncia en su carta testamento sin demostración –en ella escribe que no tiene tiempo para ello– sino que las ha descubierto. Esperar a que Poncelet "redescubriera" la Geometría Proyectiva en la cárcel de Saratoga y que llevó a la "inocente" pregunta de Poincaré de por qué, si en Grecia había surgido un Euclides descubridor métrico-euclídeo, no surgió un Euclides descubridor proyectivo. O indicar que a David Hilbert no se le ocurrió invertir la definición por postulados, sino que descubrió la definición implícita no se sabe muy bien cómo. O a Cédric Villani que, después de tres años duros de trabajo, como cuenta en el libro citado, no inventó nada, no se le ocurrió nada, salvo descubrir "sus demostraciones sobre el amortiguamiento de Landau no lineal y la convergencia hacia el equilibrio para la ecuación de Boltzmann", como reza el comunicado de la concesión del premio Fields.

En paralelo habría que admitir que a un escritor como Dostoievski no se le ocurrieron, manejando el lenguaje ordinario en este caso, las ideas que plasmó en *Los hermanos Karamazov,* sino que descubrió esas ideas, ya existentes en un mundo situado no se sabe dónde, un mundo al que tampoco se sabe cómo llegó a descubrir.

Ese mundo eidético parece independizarse de quien lo construye y se pone en paralelo a la situación que se establece en la obra literaria de Luigi Pirandello, *Seis personajes en busca de autor*. Ahora es la matemática la que busca su autor, busca quien la descubra y dé cuenta de su existencia. Se entra, aquí, en el Ámbito de lo Simbólico de creencias apoyando el terreno puramente conceptual. En la creencia de que el mundo matemático es un mundo eidético de formas que ya está dado y preparado para ir siendo descubierto. Existencia apoyada en la metáfora utilizada por Gottlob Frege, por Bertrand Russell, y que ya es metáfora tópica: un mundo matemático que se va descubriendo como Colón descubrió América. Las fechas y autor de unos teoremas, de unas áreas completas de conocimiento, lo que indican es el autor y momento de su descubrimiento.

Desde esta creencia se pasa a un intento de fundamentar ese mundo, en su totalidad, partiendo de la convicción de que se puede reconstruir desde la Aritmética. Se hace clave, por ello, fundamentar esa Aritmética. Y se pretende hacer apoyándose en la lógica. Lógica que no es la aristotélica sino la lógica formal construida por Frege y Peano y rehecha por Russell-Whitehead.

Admitido el intento de fundamentación, el resultado que se tiene es que las proposiciones son estrictamente lógicas y, como afirmaría Wittgenstein en 1921, en su *Tractatus*, se tendría como consecuencia que

4.441. No hay objetos lógicos

Si no hay objetos lógicos, por ser las matemáticas puramente lógicas, tampoco hay objetos matemáticos. Sin objetos de los que tratar todo lo que se podría afirmar es que el hacer matemático es un mundo de ficción en paralelo al del hacer literario, al simbólico.

Sin embargo, la lógica en la que se pretende fundamentar ese mundo eidético se termina convirtiendo en otra disciplina más del mundo al que pretende fundamentar. Una disciplina matemática, porque termina aritmetizándose tras los trabajos de Gödel. Trabajos en los que se demuestra que no hay posibilidad de demostrar la consistencia o no contradicción ni la completitud de los sistemas formales en su interior. A lo que se incorporan los trabajos de Türing en los que se demuestra la indecibilidad de los mismos. La pretendida fundamentación con su realismo ontológico incorporado salta por los aires.

En el aprendizaje, en la captación del hacer matemático, lo que se encuentra es un hacer con sus modos, temas, cuestiones, problemas, conjeturas como si ya estuviera todo más o menos dado. De hecho todo matemático tiene que partir de algo ya elaborado, ya construido para poder construir, a su vez, algún nuevo elemento conceptual; tiene que aprender captando lo previamente construido por otros. Ello no implica que ese hacer se encuentre en otro mundo, como tampoco lo está la ciudad desconocida a la que llega y la recorre paso a paso. Este hecho es el que hace cobrar la importancia de textos como el *Análisis* de Goursat, base para el estudio de todos los normalianos franceses durante cuarenta años y sustituido por los textos bourbakistas a partir de los años cuarenta del siglo XX en Francia. La ciudad se ha ido construyendo y reconstruyendo a lo largo de los años como el mundo conceptual matemático que se ha ido construyendo y reconstruyendo por los matemáticos a lo largo del tiempo.

En términos más pretendidamente filosóficos, se puede afirmar que las cosas o entes matemáticos no son sustancias, aunque sí seres que existen en potencia, pero únicamente en el conocimiento y no a título de realidad separada, sino que desde ese conocimiento se plasman en un lenguaje propio, como seres ideales y con "los caracteres que les asignan los matemáticos" en palabras de Aristóteles en su *Metafísica*, (1048 b 10 y 1077, b 30).

El ecosistema matemático no es un mundo construido no se sabe por quién ni cómo acceder a él. Ese ecosistema o mundo conceptual matemático se ha ido construyendo y transformando por los matemáticos que lo han ido plasmando en escritura. Desde esa plasmación escrita todo matemático creador ha de captar su contenido, o parte del mismo, para tratar de continuar la construcción. A partir de esa captación es la potencia imaginativa, la intuición, el instinto del matemático creador que capta analogías, nuevos problemas y conjeturas, lo que le conduce a construcciones que permitan elaborar nuevas construcciones mentales, plasmarlas y difundirlas por escrito. Intuición, imaginación, conjeturas, ensayo y error, perspicacia, duro trabajo de completar demostraciones que se reconozcan por los demás matemáticos son términos que utilizan todos los matemáticos creadores.

En el fondo, es la afirmación de Dedekind cuando escribe que somos de naturaleza divina y tenemos el don de crear. Es lo que Cédric Villani ha puesto de relieve en su libro en el que cuenta cómo se va desarrollando día a día su trabajo. Ello me hace insistir en que no es por el formalismo sígnico escrito, por el esfuerzo sistematizador formalista que se trata de imponer desde finales del siglo XIX y principios del XX, por el que se han llegado a construir nuevos teoremas, sino por la intuición, las analogías que sugieren los conceptos matemáticos. Aunque es de justicia reconocer el poder del lenguaje ideográfico para obligar a precisar el contenido de la intuición creadora.

Es posición que pongo en paralelo al creador de entes de ficción literarios o al creador de composiciones musicales. Todos manejamos el lenguaje, aunque no sepamos las reglas gramaticales que manejan los lingüistas. Pero hay quienes dominan no solo el lenguaje en el que nos expresamos, sino que tienen la capacidad de captar lo que antes he calificado de lo más humano del hombre y expresarlo en una obra literaria y de tal manera que, en su lectura, nos sintamos afectados emocionalmente. Ese escritor no ha descubierto lo que escribe sino que ha construido una obra con sus correspondientes personajes de ficción. Lo mismo se puede decir del compositor musical. No todos somos Mozart, Beethoven o Schubert; no todos somos Cervantes, Dostoievski, Stendhal, Kafka; no todos somos Pascal, Newton, Descartes, Poincaré, Connes, Grothendieck, Villani.

Se llega a matemático –profesor, divulgador, investigador–, escritor, músico después de una fase más o menos larga de obligatorio aprendizaje; dura fase de trabajo y aprendizaje permanente, nunca cerrada: siempre se está aprendiendo. Los términos antes empleados para el matemático creador son válidos, igualmente, para el artista creador con sus intuiciones, sus errores y fracasos, su imaginación, su potencia creadora.

Es consecuente que, de aceptar la posición del realismo eidético, se tenga que plantear la irrazonable efectividad del hacer matemático: cómo, desde el descubrimiento y manejo de unos entes de ficción basados en la lógica formal que, a su vez, es un sistema de proposiciones tautológicas que trata de fundamentarse en sí mismo, se hace posible la efectividad del hacer matemático en las distintas disciplinas científicas, en el conocimiento y, con él, su influencia en la vida ordinaria. Es posición que, entre otras limitaciones, no puede dar cuenta de esa efectividad ni ha podido dar cuenta de la pretendida consistencia de su intento de fundamentación.

Por el contrario, el mundo matemático se muestra ligado a la vida ordinaria desde un principio, como el número y la reiteración enlazados al dar un paso y otro y otro; a construir artefactos como las casas con sus nociones de perpendicularidad, paralelismo, dentro y afuera… Enlaces con la vida ordinaria desde la cual se pasa a procesos de conceptualización y se tienen "objetos" matemáticos y sus relaciones y su paso a estructuras, a objetos de distintos niveles. Así, se tiene el número, los grupos, las diferentes geometrías, teorías con sus objetos como el Análisis, el álgebra, la computación, las categorías y la geometría algebraica… Objetos, estructuras y teorías que son manejadas desde lo tecno-científico y se muestran esenciales para poder construir las viviendas, las ciudades, los medios de transporte, los satélites artificiales, los teléfonos móviles, en general el conocimiento científico-técnico y, con él, todos los artefactos entre y por los cuales vivimos.

La construcción matemática tiene una efectividad como no la tiene el mundo de ficción literario, ni el simbólico, que puede afectar al sentimiento individual de quien lee alguna de las obras literarias, contempla las pictóricas o escucha las sonoras porque se identifica, por decirlo así, con alguno de los personajes de esas obras o se emociona con una composición musical. El hacer matemático está incardinado tanto en la vida ordinaria como en el hacer científico y tecnológico con unos resultados que han permitido vivir en este mundo de artefactos.

Y, de momento, final

Desde lo "real" tangible, desde el mundo de artefactos en el que el hombre se encuentra inmerso, se inventan o construyen los artefactos conceptuales, las ficciones literarias y simbólicas, se elaboran las normas sociales, se realizan las composiciones musicales, las imágenes y obras artísticas, se construye la mecánica cuántica…; en otras palabras, se construyen y fabrican los artefactos conceptuales, simbólicos y materiales entre los cuales el hombre, su constructor, vive inmerso.

Entre esas construcciones he destacado la construida por los matemáticos a quienes les motiva, para su hacer y en palabras de Villani, "el deseo de producir algo bello" porque, al igual que en el arte, y retomando a Poincaré, lo que el matemático busca es la belleza, la armonía de lo que construye y maneja y que no es más que la matemática.

Javier de Lorenzo
Universidad de Valladolid
Plaza del Campus s/n
47011 Valladolid
javierdelor@gmail.com