Estudios Filosóficos, 41 (1992) 7-24

Racionalidad constructiva matemática

Frente a lo perceptivo, frente a lo mítico, aunque condicionado tanto por lo perceptivo como por lo mítico, se alza el hacer matemático. Aunque existe una Matemática simbólica y existe un enfoque mítico de la matemática, voy a tratar, aquí, y algo esquemáticamente, del hacer matemático en su burbuja propia, la conceptual epistémica.

1. El hacer matemático se apoya en lo perceptivo-orgánico porque, al menos, se requiere de la inscripción del signo, cuando no del diagrama, que muestra en sí el hecho matemático, hecho matemático que va a ser reflejado, posteriormente y mediante el lenguaje, en la proposición matemática. Sin embargo es un hacer que se realiza frente a lo perceptivo-orgánico porque un hecho matemático lo es en el interior de un espacio conceptual en el que adquiere su pleno sentido, su categoría de hecho. Por ejemplo, un hecho matemático es el formulado en la expresión de Diofanto «Escribir un cuadrado como la suma de dos cuadrados». En una tabla cuneiforme de –1500 se contienen ternas que van de 3-4-5 hasta 4961-6480-8161 y que satisfacen la relación pedida en la expresión anterior, que puede escribirse como $z^2 = x^2+y^2$. Serie de ternas que no es lo pedido, pero que claramente indica que existe un procedimiento general para obtenerlas, a no ser que confiemos en la 'explicación' banalizadora de que las condiciones ambientales socio-económicas condujeron a los babilonios a entretener su tiempo en cálculos por ensayo y error hasta alcanzar toda la serie indicada, por su utilidad en las necesidades agrícolas o astronómicas o comerciales.

El hecho matemático no consiste en obtener simplemente ternas pitagóricas, sino en obtener las condiciones generales que han de satisfacer los números que compongan tales ternas y, posteriormente, un procedimiento también general que permita materializarse en números concretos y particulares. Podría sugerirse que el procedimiento de la tabla cuneiforme se obtuvo al relacionar el aspecto numérico con el geométrico logrando demostrar el teorema de Pitágoras, teorema que asegura la existencia de tales ternas para triángulos rectángulos en los cuales las longitudes de los lados fueran conmensurables. Proposición ya transformada que posibilita su establecimiento en términos absolutamente generales y no para un triángulo particular, singular o concreto, obtenida la proposición a base de medidas experimentales. Imposibles tales medidas que exigen de la conmensurabilidad cuando el teorema de Pitágoras conduce, de modo inmediato, a magnitudes inconmensurables.

La generalidad, la universalidad sólo es alcanzable mediante un proceso interno al hacer matemático y no mediante medida experimental alguna, exterior a ese hacer. Proceso que es el demostrativo, único mecanismo capaz de soportar la verdad de la proposición que refleja el hecho matemático. Demostración que supone el enlace de unas con otras proposiciones y, consecuentemente, de unos hechos con otros, en el interior de un contexto, de un marco en el que se relacionan y se convierten, realmente, en tales hechos. Marco que, desde un aspecto lingüístico-proposicional, va a constituir la teoría de esos hechos.

Supone, lo anterior, un haz de consecuencias, entre las que menciono:

1.1. La aceptación de que se maneja no un elemento singular, sino el elemento cualquiera, bien como número, bien como figura geométrica. Es el problema que, desde un enfoque lógico, se ha denominado de existenciación.

1.2. Manejar como criterio de verdad no la concordancia con algo exterior, sino la demostración, y en el interior de un sistema. En otras palabras, obliga a aceptar un carácter epistémico interno, colocado al margen de la «verdad experimental».

1.3. Admitir el proceso demostrativo interno a un sistema o espacio determinado, con la relatividad consecuente de lo «verdadero», obliga a aceptar todas las consecuencias del mismo. Quiero decir, si se admite el proceso demostrativo, entonces hay que admitir la verdad de las proposiciones que en él se obtengan. De esta forma, la existencia de los números inconmensurables, de los números irracionales. Aceptados, el proceso interno exige que tales nuevos números se conviertan en nuevos hechos, por lo que tendrá que establecerse un marco en el cual cobren sentido pleno tanto existencial como operatorio y no queden como meros objetos «imposibles» o «imaginarios» —y me refiero tanto a los irracionales como a los números complejos, como a los números de cuerpos cuadráticos o las rectas isotropas...—. Ello implica, por un lado, la discusión acerca del estatuto ontológico de tales consecuencias, pudiendo llegar a un realismo al estilo platónico en el que se privilegie el carácter óntico de los objetos obtenidos; carácter óntico por el cual, lo sepa o no el matemático, poseen una serie de propiedades que el matemático no pone, sino que son propias de dichos objetos en el interior del cuadro en el que se definen, del cuadro que esta vez sí crea el matemático. Por otro lado, que el espacio conceptual posee un autodesarrollo que es independiente de cualesquiera condiciones externas, socioeconómicas o coyunturales o perceptivas, lo cual no implica que esas condiciones externas no influyan potenciando, favoreciendo o entorpeciendo a quienes se dedican a trabajar en este tipo de espacio conceptual.

El espacio en el que cobran sentido los hechos matemáticos, los que van a convertirse en teoremas cuando se los expresa en el lenguaje, va a venir definido por unos postulados o axiomas. Un sistema de postulados o axiomas, en unidad, es quien permite la caracterización del campo de juego, del marco. Como tal caracterización admitirá unos hechos como propios —y los teoremas consiguientes como verdaderos o falsos— mientras que negará el estatuto de hechos a otros —y sus proposiciones correspondientes carecerán de sentido.

Como ejemplificación, y manteniéndome en un nivel elemental, señalo que la axiomática euclídea caracteriza el espacio métrico euclídeo de la Geometría elemental. Espacio en el cual se tiene unas figuras, donde figura es lo que ocupa un lugar, lo que posee unos límites. Los hechos matemáticos van a hacer referencia tanto a esas figuras, directamente, como a sus propiedades. Así, el citado teorema de Pitágoras; así, el hecho que se expresa en el teorema «la suma de los ángulos de todo triángulo es dos rectos». Proposiciones que reflejan hechos en torno a unas figuras que lo son de acuerdo a ciertas reglas y mediante procesos constructivos determinados. Reglas y procesos que son los que especifican precisamente los axiomas euclideos al caracterizar un tipo especial de espacio y que, por ello, pueden no ser válidos en otros. Los axiomas euclídeos hacen que el espacio de la Geometría métrica elemental posea como notas las de:

Isotropía, establecida por el Postulado 3 que indica que dado un punto y una distancia, se puede trazar una única circunferencia con centro en el punto dado y radio la distancia dada;

Ilimitación, por el Postulado 2 en el que se pide que toda línea recta puede prolongarse ilimitadamente;

Homogeneidad, tanto como relatividad de posición, y es el Postulado 4 en el que se dice que los ángulos rectos son iguales —lo cual sólo lo verifican los espacios de curvatura constante—; como homogeneidad de magnitud, por el postulado 5 del paralelismo —que sólo verifican los espacios de curvatura cero;

Continuidad, por el Axioma 1 donde se establece que cosas que son iguales a la misma cosa son iguales entre sí;

Isotropía, ilimitación, homogeneidad de posición y magnitud, continuidad, o características del espacio geométrico euclídeo —y, en él, de un cierto tipo de figuras y de unas determinadas transformaciones— que jamás puede verificar el espacio perceptivo-orgánico. Sólo la caracterización axiomática, el método axiomático conquista ese establecimiento. Sólo ese método logra la determinación de un marco conceptual en el que cobren sentido unos hechos y, con ellos, el valor veritativo de las proposiciones que los traducen. Y he aquí la primera nota de la racionalidad constructiva matemática, de la racionalidad conceptual epistémica.

2. De la afirmación de ser el conjunto de axiomas el que, como bloque, delimita el terreno de juego, pueden obtenerse muchas consecuencias.

Entre ellas, las siguientes:

2.1. La verdad teórica se vuelve verdad relativa, se convierte en una verdad de lo posible, no de lo absoluto ni de lo necesario. Verdad posible porque la proposición depende del sistema teórico en el cual se establezca el hecho. Un teorema como el denominado «teorema fundamental del álgebra» establece que toda ecuación en una incógnita y de grado n posee n raíces. Enunciado por Descartes, aceptado por casi todos los matemáticos que fallaron en obtener una demostración del mismo hasta comienzos del siglo XIX, este teorema es falso si nos movemos en el ámbito de los números reales; basta un contraejemplo: la ecuación $x^2+1 = 0$. Es trivialmente conocido que el teorema «la suma de los ángulos de todo triángulo vale dos rectos» sólo se verifica en la Geometría euclídea, es falso en la riemmaniana y lobatchevskiana y carece de sentido en otra multitud de geometrías.

2.2. Los postulados pueden modificarse. Cambiar un postulado significa un cambio de marco de referencia y, con él, del criterio de verdad. Modificación de postulado como creación de otros espacios posibles. Por seguir con el ejemplo elemental geométrico, puede modificarse el postulado V, el del paralelismo. Establecer que por un punto exterior a una recta se pueden trazar varias perpendiculares a dicha recta supone obtener una geometría riemmaniana; si por un punto exterior a una recta se puede trazar una única perpendicular y una única paralela a la recta dada, nos conduce a la geometría euclídea; trazar una única perpendicular pero dos paralelas, a la geometría lobatchevskiana.

Una mera modificación permite variar el espacio definido. Con cierto cuidado. Si se modifica un postulado, lo que cambia es el total y, con él, el significado de los conceptos y de los teoremas, de los hechos del espacio. Aunque pueda tenerse un bloque común, aparentemente —como la Geometría absoluta constituida por los teoremas que no dependen del postulado 5, en el caso ejemplificador anterior—. Pero esta modificación puede llegar a alterar a los demás postulados, puede ocurrir que el postulado que reemplaza a uno dado sea incompatible con algunos de los restantes. Así, la modificación en el caso de la geometría riemmaniana supone que también queda afectado el postulado 2 de ilimitación en el sentido de que ahora las rectas, el espacio total ya no es ilimitado. Modificables, ciertamente, pero sabiendo que lo que se modifica es toda la estructura, todas las características del espacio.

2.3. Ligándose con lo anterior, se tiene que la modificación no sólo altera el marco sino, fundamentalmente, el propio significado de los términos que entran en juego y, con él, de las reglas constructivas. Ello vuelve a afirmar lo antes dicho: los conceptos sólo poseen un significado en el interior de un marco de referencia. En el ejemplo geométrico anterior, la denominación de «recta» posee un significado en la geometría euclídea y otro diferente en la geometría riemmaniana. Consecuentemente, se plantean varios problemas; entre ellos el de que hasta qué punto ambas teorías poseen algo en común, aunque parezcan del mismo tipo y posean todo un sistema de postulados que en apariencia son iguales. La respuesta es siempre positiva según que las diferentes teorías puedan relacionarse entre sí conforme a uno de los dos modos siguientes:

1. Por representación de una en otra, mediante la definición de los conceptos de una en términos de la otra, al estilo del diccionario creado por Poincaré para las geometrías no-euclídeas respecto a la euclídea: se identifica un punto euclídeo con un par de puntos diametralmente opuestos sobre una superficie esférica; una recta euclídea con circunferencia máxima, etc. Método de identificación o interpretación que no es otro que el de la construcción de un modelo de una teoría en el interior de otra, el modelo de una subestructura isomorfa a la dada. Es lo realizado de modo permanente en el proceso constructivo matemático y no solo en los terrenos geométricos. A partir del semianillo de los naturales puede construirse el anillo de los enteros como clases de equivalencia de pares de naturales y, posteriormente, por isomorfismo, se identifica un subconjunto de este anillo con el simianillo de partida; es claro que un natural no es una clase de equivalencia de pares de naturales pero, salvo isomorfismo, pueden estimarse idénticos. De modo análogo, puede construirse el cuerpo C de los números complejos con el obtenido mediante las clases de equivalencia módulo x^2+1 del anillo de polinomios en una indeterminada con coeficientes reales; posteriormente, se identifica cada clase de equivalencia con un par de reales y con un punto de un plano, el plano complejo, y cada real con el par cuya segunda componente es cero... Método de inmersión de una teoría en otra mediante isomorfismo entre dos estructuras, de las cuales la segunda constituye un modelo para la primera.

2. Por inmersión de dos o más teorías en una que las englobe; así, las geometrías mencionadas pueden quedar englobadas en la Geometría proyectiva —con el consiguiente problema de cambio en el significado de los términos que se manejan—, o en el Algebra lineal donde a un espacio afín se le puede dotar de una u otra métrica obteniéndose las tres mencionadas, y algunas más, como casos particulares de los espacios vectoriales normados.

En cualquier caso, el método del modelo supone un salto conceptual, dado que el significado de los términos no es un significado absoluto sino relativo al marco conceptual en el cual se estén elaborando los hechos matemáticos. Marco conceptual que permite la realización de varios modelos, con lo cual se puede afirmar que una teoría se desdobla en el par: Teoría y conjunto de modelos, de interpretaciones que la realizan. El hacer matemático se convierte, de esta manera, en un hacer de teorías y modelos de lo posible, no de lo necesario.

2.4. El método del modelo mencionado permite superar la posible arbirariedad de los sistemas de postulados que se establezcan. Y ello mediante la consistencia relativa de unas teorías en otras, mediante la creación de una teoría isomorfa a una dada pero en el interior de una ya admitida. Igualmente, deseo destacar que ya el mero hecho de poder modificar los postulados, estudiando su alcance, las posibles teorías a que dan paso, las relaciones entre las mismas, supone un aspecto constructivo fundamental en el hacer matemático. Porque convierte, ahora según el puro método axiomático, a los propios sistemas teóricos en hechos a manejar, con su planteamiento y resolución de cuestiones.

2.5. No voy a seguir por este camino. Sí insistir en que el método axiomático, primera nota de la racionalidad constructiva, ha sido enfocado desde dos puntos de vista que no siempre se han distinguido y que son perfectamente compatibles entre sí. Enfoques que voy a calificar de «sagrado» y «profano». Por el primero, cualquier proposición convertida en teorema ha de ser demostrada atendiendo únicamente a los postulados y reglas de derivación de la teoría que se esté manejando, que ha de aparecer, al menos, axiomatizada si no formalizada, y sin hacer uso de los matices comprendidos en el aspecto inscripcionista. La demostración, desde lo sagrado, ha de poseer una estructura formalizada.

Desde el enfoque profano, basta admitir las reglas de juego como dadas de antemano y luego tratar de enfrentarse con los hechos sin necesidad de acudir de manera permanente al proceso formalizador. Es la postura adoptada al enunciar el primer ejemplo de hecho matemático, en el punto 1: las ternas han de ser de números naturales. Supuesto que se daba incluso de manera implícita y no ya explicitado el campo de juego. En el hacer matemático parece, a veces, un poco pedante recurrir de modo permanente a los postulados iniciales, a las reglas de juego. Se supone que está en un campo, en una teoría, que se conocen las reglas y los postulados de la misma, y se pasa a trabajar, con el convencimiento de que, en caso de duda, puede acudirse al enfoque sagrado y contrastar el teorema, completar la demostración abreviada que se ha obtenido.

Dar preponderancia a uno u otro enfoque es cuestión de gusto personal, siempre que se atenga, por supuesto, a la última advertencia realizada. Pero es cuestión que ha impedido ver, para quienes adoptan el enfoque sagrado, el aspecto constructivo del método axiomático, la posibilidad de campo abierto que ofrece y que ha ofrecido en la labor matemática y que es un aspecto intrínseco a dicho método. Pero también ha impedido ver, a quienes adoptan el enfoque puramente profano, que sólo el sagrado permite regular su acción, que sólo la demostración dentro de la teoría tiene la última palabra. Es cuestión ligada a la consideración de que el método axiomático se construye únicamente para caracterizar los hechos ya dados, que una teoría se elabora simplemente acumulando observaciones, fenómenos, datos. No se tiene en cuenta que esa teoría es la que condiciona a los hechos, a los datos, a las observaciones y de tal manera que los hechos lo son únicamente en el interior de una teoría y que si ésta no existe, los hechos tampoco. Y una teoría sólo puede venir caracterizada delimitando, categorialmente, los objetos y las cualidades que de los mismos se acepten. Delimitación que, a veces, se realiza de manera implícita, como cuando en la «ciencia nueva» se determinan las cualidades «primarias» que han de constituir el objeto de estudio de la Mecánica y se obliga a que las cualidades «secundarias» se definan en función de las primarias, si es que llegan a definirse, además de aceptar postulados implícitos como los de Uniformidad de la naturaleza y Constancia de la misma, consecuentemente, de las leyes o proposiciones que den cuenta de tal constancia y uniformidad, de las regularidades que, a la fuerza, han de observarse.

La caracterización teórica adopta como arquetipo, precisamente, la delimitación del marco en que se tiene la teoría, mediante el método axiomático. Aunque tal arquetipo no implica la axiomatización formal de dicha teoría, de la que se maneje, en todas las ocasiones, sino meramente la posibilidad de la misma. Posibilidad que es la clave del método, de lo que he calificado como primera nota de la racionalidad del hacer matemático.

3. Si en el punto anterior he destacado el carácter constructivo del método axiomático, con indicación incluso, aunque implícita, de alguno de los mecanismos utilizados, voy a reseñar ahora ese carácter constructivo en el interior de una teoría, indicando alguno de los mecanismos constructivos.

He afirmado que en una teoría matemática se manejan «hechos matemáticos». Estos adoptan dos formas: teorema, problema. Según Proclo, *teorema* es una proposición cuya verdad debe ser probada, demostrada; *problema* es una proposición que establece algo que hay que ejecutar, una construcción a realizar. Exigen, los teoremas, la previa existencia de unos postulados, de otras proposiciones de las cuales puedan ser obtenidos mediante unas reglas de derivación. Exigen, los problemas, del previo establecimiento de unas reglas, de unos criterios que posibiliten dichas construcciones.

Constituyen, los teoremas y los problemas, el conjunto de hechos matemáticos. Aun mostrando aspectos diferentes, ambos tipos de hechos van a encontrarse íntimamente ligados. En los teoremas se exige de una inferencia demostrativa; en los problemas se carece de este aspecto inferencial, pero ello no significa que caiga bajo la inducción en el sentido científico-experimental del término ni bajo la «idea feliz» psicologista o bajo el azar, sino bajo un proceso racional que cabría poner en paralelo al proceso destacado por Peirce de abducción. Los dos tipos de hechos se muestran claramente plasmados en los dos pasajes geométricos o matemáticos del diálogo *Menón* de Platón.

La inferencia no es meramente una deducción, sino que se exige que sea una demostración. Si bien Platón indica en su segundo pasaje que los matemáticos discurren «por hipótesis» bajo el esquema condicional: «Si..., entonces...», este esquema, en el hacer matemático, exige de una fase previa, eminentemente constructiva. Porque es precisamente esta fase constructiva la que va a asegurar la existencia del objeto definido, objeto que simplemente se postula en la hipótesis, en la propia caracterización del marco dado por el sistema de axiomas. Una mera definición no asegura la exitencia de lo definido, como ya afirmaron Platón y Aristóteles, aunque Poincaré la retomara atribuyéndola a Mill. Y la existencia, en el hacer matemático, sólo puede venir asegurada por el modelo o ejemplo, es decir, por la construcción de un universo posible en el que posean significado los conceptos dados por las proposiciones verdaderas, los teoremas acerca de dichos objetos. Asegurada la existencia de un modelo, con su función de interpretación asociada, podrán asegurarse las propiedades reflejadas en las proposiciones que se deriven mediante las reglas de derivación inferenciales. Sólo en este caso posee todo su sentido el afirmar que la inferencia matemática responde al esquema condicional. Lo constructivo, fundamentalmente reflejado en el problema como apoyatura para lo inferencial demostrativo, es lo que permite que este proceso inferencial no caiga en el vacío. Problema de construir el modelo o ejemplo pertinente.

Por otro lado, cuando se establece y se resuelve un problema, el propio proceso resolutivo permite convertir el problema en teorema, incluso con su esquema inferencial asociado. La recíproca, convertir un teorema en problema, consituye un mecanismo de carácter trivial. Por ejemplo, Kant convierte el teorema «La suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos» en problema constructivo, y da el mecanismo de resolución. De modo inmediato, tal solución puede convertirse en una inferencia condicional, aunque Kant pretendiera que el carácter constructivo de la Matemática es tal que dicha inferencia es imposible.

Voy a detenerme, por todo lo anterior, en el problema. En el primer pasaje de Menón plantea un problema: duplicar un cuadrado. Para resolverlo, siempre en el marco de la geometría métrica euclídea elemental, varias fases. Se establece la hipótesis de duplicar el lado *a*. Se calcula el área del cuadrado obtenido y se observa que no es el doble sino cuatro veces mayor. En consecuencia, esta hipótesis debe ser rechazada. Pero tal hipótesis indica como plausible que el lado debe aumentarse, ciertamente, pero no al doble; la figura auxiliar, el diagrama, parece sugerir que el aumento debe ser el de la mitad del lado. Nueva hipótesis que, comprobada, falla. Este segundo fallo ya es más operativo que el anterior, porque indica que el procedimiento de ir alargando el lado en cantidades cada vez más pequeñas no parece bastar, porque el área pedida es $2a^2$ y las áreas obtenidas por este procedimiento van a ser áreas expresadas, en principio, por números racionales. La segunda hipótesis va a permitir marcar unas limitaciones a un procedimiento y a pensar que un problema tan fácil como éste oculta un auténtico problema: el de la inconmensurabilidad. Esta segunda hipótesis conduce a ponerse en guardia ante los números irracionales y, por ello, a posibilitar su manejo. Es, por tanto, una hipótesis fallida, pero absolutamente enriquecedora.

Dos conjeturas que, a pesar de su aparente fallo, han proporcionado una buena información: la de que no conviene seguir reiterando el proceso que tales conjeturas proporcionan y la de que es posible que intervenga el número irracional. Con ello, al realizar el diagrama auxiliar para apoyar el razonamiento, estas hipótesis van a proporcionar una ayuda mucho más importante de lo que su aplicación directa indicaba mediante una muy ligera modificación de las condiciones de las mismas: al haber representado, bajo la primera hipótesis, el cuadrado de lado doble, y sobre él el cuadrado de lado $(a+\frac{1}{2}a)$, ha debido trazarse como líneas auxiliares las diagonales, trazado obligado por la segunda condición de que aparezcan irracionales. Pero entonces se muestra un cuadrado en el centro de la figura obtenida que es el doble del cuadrado dado, pero construido precisamente sobre la diagonal del cuadrado de partida. El problema está resuelto. Bastaría decir, al estilo hindú, ¡Mira! Basta, ahora, traducirlo al lenguaje inferencial si quiere afirmarse el carácter demostrativo o sagrado del proceso. Traducción que, sin embargo, no se muestra necesaria desde el enfoque profano.

Permítame el lector, aquí, un inciso. He comenzado indicando que el hacer matemático se alza frente a lo perceptivo-orgánico, y ahora acudo a esa intuición perceptiva. No hay contradicción alguna. Porque esta intuición, de la que todo matemático de raza se precia, no es la perceptiva-orgánica, sino una intuición establecida por lo incultural y que se superpone a la orgánica. Si se sitúa el lector en una naturaleza no transformada por el hombre no «vería» rectas, ni circunferencias, ni números, ni razones, ni estructuras...; situado en una habitación rectangular no «percibirá» líneas rectas paralelas. Pero estos son los objetos que el matemático ha de «ver» y, más que esos objetos, las relaciones que entre ellos se establezcan, la estructura que los objetos conceptuales formen, las transformaciones y aplicaciones que puedan darse entre las mismas. Ha de ver lo que el hombre pone.

Intuición que no es estrictamente geométrica y que ha de ser adquirida mediante un trabajo, mediante un proceso de ascesis y estudio con su inmersión correspondiente en el mundo conceptual. Intuición, insisto, que no hace referencia a la visión orgánica, fisiológica, sino a la conceptual, aunque para ello tenga que apoyarse en el diagrama o en la fórmula estrictamente sintáctica que muestran lo que ha de verse, pero que, a veces, también son fuente de errores, de equivocidades al obligar a ver el diagrama y no lo que ese diagrama representa. Intuición que permite realizar una construcción que diga lo que una inferencia, de entrada, no puede. Una vez vista la construcción, la «idea» que la subtiende, hay que comprobarla, falsarla y, una vez comprobada, bastará traducirla a lenguaje proposicional, al lenguaje de la teoría y, en él, realizar la serie de inferencias que permitan demostrar que lo construido, lo intuido, pertenece, efectivamente, al campo de juego, a la vez que permita el enlace y la sistematización enriquecedora de la teoría en la cual se está trabajando. Citaría, aquí, la lemniscata que aparece en el borrador de Abel durante su estancia en París, como clave de su visión de las funciones elípticas como funciones doblemente periódicas, o la de Poincaré en su viaje a Caen enlazando la geometría hiperbólica con las funciones meromorfas, o un diagrama como en el mencionado pasaje de Platón con un «¡Mira!» en un texto de Brahmagupta, o los diagramas de Weiertrasss para los teoremas de prolongación analítica... Diagramas que permiten plasmar la idea que luego se reflejará mediante la proposición o cascada de proposiciones que siguen al término «teorema» o al término «problema». Intuición variable con el contexto histórico y variable a lo largo de una educación y un trabajo constante y que exige el previo dominio de unos contextos matemáticos. Aunque, y para terminar un inciso largo, no tan largo como el tema merece, creo que lo indicado es válido también para la intuición en otras disciplinas, en prácticamente la mayoría de los campos conceptuales.

El juego hipótesis-comprobación-hipótesis..., no constituye una inferencia lógica. Tampoco es un proceso aleatorio, sino más bien el terreno constructivo o creativo de la razón conceptual, no psicológico. Terreno que viene condicionado, esencialmente, por el campo de juego que determina contextualmente los mecanismos a utilizar en cada caso y que cada hipótesis y su falsación correspondiente van enmarcando aún más. Y ello en función de los modelos de la teoría que se está manejando. Son éstos los que permiten la delimitación de los posibles caminos a seguir, de las posibles conjeturas que deben realizarse. Los modelos posibilitan la estructuración que los campos de juego poseen, con un carácter óntico que no puede olvidar ningún matemático, como el pintor no puede olvidar que un cuadro al óleo posee como elementos ónticos tanto el color, como la intensidad, la textura, la posición, el tamaño, hasta la forma del lienzo... Y esta estructuración propia se refleja en una serie de mecanismos constructivos de los cuales ya he mencionado uno: el *contraejemplo.* No sirve únicamente para negar una proposición, sino para delimitar el campo de validez de la misma y, con ello, posibilita la creación de otros posibles modelos con estructuraciones propias respecto a las cuales cabe establecer nuevas teorías.

Junto al mecanismo del contraejemplo voy a mencionar como características de la construcción racional matemática, las siguientes, bien entendido que no se pretende una Lógica del descubrimiento sino una explicación descriptiva de los mecanismos que intervienen en dicha construcción:

3.1. *Análisis* o *método analítico* como lo denominara Pappus. Consiste en suponer conocida la solución y analizar o estudiar las condiciones, las características de tal solución y que son las que hacen posible o no su construcción. Es lo indicado por Platón en su segundo pasaje: como hipótesis supongo que esta figura satisface las condiciones, es una solución; analizándola se obtendrá la posibilidad o no de la solución conjeturada.

Es el mecanismo clásico de los lugares geométricos. Pero también es el mecanismo válido para los restantes campos, como en teoría de números. Así, en el ejemplo dado en el punto 1, este procedimiento es el que conduciría a obtener la solución general de las ternas pitagóricas. De modo análogo, este mecanismo permitirá hallar la solución al problema de duplicar el cuadrado de modo inmediato.

Suponer resuelto el problema es, en el fondo, un proceso de inversión. Cuando la demostración directa no es factible, se invierte y o bien se admite la solución para analizarla, o bien se admite la proposición opuesta a la dada y se estudian sus consecuencias. En el campo inferencial constituye la clave del proceso de reducción al absurdo, ya empleado por Ptolomeo para intentar demostrar el postulado de las paralelas a partir de los restantes postulados euclídeos, apoyándose para ello en su diagrama asociado, diagrama que, desde lo perceptivo-orgánico, constituye una aberración... Reducción al absurdo como mecanismo operatorio a utilizar en todos los casos en que se pretende la demostración de unicidad o la no pertenencia de un elemento a un conjunto. Escolar, trivialmente, su mínima ejemplificación se centra en la demostración de la irracionalidad de 2, que ya diera como muy conocida Aristóteles en *Metafísica.*

Es, el proceso de inversión, el que se halla en el centro de lo que en otros lugares he calificado de rupturas epistemológicas en el hacer matemático. En el «hallar la razón» de Abel en cuanto al estudio de las condiciones de convergencia y en la clave para el proceso de aritmetización. En la inversión del cálculo algebraico al álgebra donde, en lugar de buscar directamente la resolvente de una ecuación, se invierte para determinar las condiciones que han de satisfacer las raíces de dicha ecuación, supuesto que existen; condiciones que conducen a la estructura de cuerpo. Análogamente, constituye una inversión la ruptura de 1872 por la cual se adoptan los sistemas o conjuntos en lugar de los elementos para enfrentarse a los problemas planteados por las discontinuidades de las funciones y poder dar razón de las anomalías que provocaban. Con ello lo finito pasa a convertirse en un rincón de lo infinito.

3.2. *Mecanismos de generalización, ampliación o reducción de condiciones.* El empleo de las ternas pitagóricas permite ejemplificar lo que designo con estos términos. Obtenidas las condiciones que han de satisfacer los naturales x, y, z para que se verifique $z^2=x^2+y^2$, parece factible plantear la búsqueda de ternas que satisfagan la misma condición, pero ahora con exponente 3: descomponer un cubo en suma de dos cubos. Y sucesivamente hasta llegar a la formulación absolutamente general, al teorema regio de Fermat, $z^n=x^n+y^n$. Pero también se puede generalizar la cuestión buscando qué números pueden descomponerse en suma de dos cuadrados, o de tres o de cuatro cuadrados... Se han cambiado las condiciones. Cambio que adquiere toda su significación cuando en el caso n=3 de la fórmula anterior de Fermat se obtienen soluciones, pero ahora no en el semianillo de los naturales, sino en unos números cuadráticos, números que conforman un anillo que carece de la propiedad de factorización única. Variación de condiciones que muestra una inmediata generalización porque permite la construcción de nuevos campos numéricos. En el caso de este teorema, la búsqueda de una demostración de su imposibilidad ha conducido a la creación de los enteros cuadráticos, de los números ideales de Kummer, de los ideales y anillos, del álgebra clasificada de «moderna». De un problema de enunciado elemental, el pitagórico, mediante un proceso de generalización junto a mecanismos de modificación de condiciones —como la de factorización única—, que se van imponiendo al matemático a lo largo del proceso constructivo y que, a veces, le cuesta aceptar a ese matemático, se pasa a un terreno base de la calificada álgebra moderna.

Cabrían otros ejemplos: las raíces «imposibles» que surgen al resolver las ecuaciones de segundo grado y que dan paso a los números complejos, manteniendo las leyes formales de cuerpo, pero variando las condiciones en cuanto a la naturaleza de los números u objetos matemáticos; o la generalización del teorema de Euler para poliedros convertida en teorema de Euler-Poincaré para símplices en la topología combinatoria...

Constituye un proceso o mecanismo *natural* en el hacer constructivo matemático: cuando se obtiene un teorema en un campo determinado, es obligado generalizarlo, buscar si se cumple en otros modelos. En esta búsqueda se hace preciso analizar las condiciones del teorema y estudiar aquéllas que pueden ser modificadas, bien mediante una ampliación, bien mediante una restricción, para lograr la generalización requerida, la validez del teorema en otros modelos. Precisamente muchas de las tesis doctorales y gran cantidad de ensayos en revistas actuales no consisten en otra cosa que en ejemplificaciones de este mecanismo, la mostración de su manejo por parte del autor de la tesis, del ensayo.

3.3. *Analogía.* Va ligado a los anteriores y creo que en el inciso solicitado al lector he bosquejado la amplitud de este procedimiento. Se apoya, básicamente, en que las distintas teorías constituyen lenguajes diferentes referidos a unas mismas estructuras; ropajes distintos, cada teoría, cada lenguaje, que se convierten en los distintos modelos para una misma estructura. Así, puede verse cómo una función de variable compleja puede leerse como una transformación geométrica; inmediatamente, los problemas geométricos pueden ser abordados con el arsenal de las funciones analíticas y en paralelo al establecimiento de las mismas; o bien, de modo recíproco, el estudio de las funciones de variable compleja puede hacerse en paralelo o de modo análogo al estrictamente geométrico. Sin llegar a este tipo de traducción, puede realizarse el estudio de una teoría siguiendo el esquema realizado en otra: las funciones meromorfas de Poincaré iban en paralelo a sus trabajos sobre la geometría hiperbólica; la teoría de cobordismo fue elaborada por De Rham siguiendo la misma marcha de los trabajos de Poincaré... Analogía que, a veces, supone el mecanismo, su manejo, indicado en el punto anterior, de modificación de condiciones.

3.4. Es claro que a estos mecanismos se les debe agregar los que consistían en la *sistematización de las condiciones iniciales*, el estudio del papel que juegan los postulados que caracterizan el terreno de juego de cada teoría. Son los mecanismos indicados en el punto 2 anterior y que muestran el carácter constructivo del método axiomático.

Los mecanismos constructivos indicados constituyen, en bloque, la segunda nota de la racionalidad matemática. No son, claramente, inferenciales. Pertenecen a lo que desde Reichenbach se ha denominado «contexto de descubrimiento», abandonado como perteneciente a lo irracional, como perteneciente a un campo en el que la Lógica nada tiene que hacer. Pero son mecanismos que, a diferencia de lo que opinaban los seguidores del empirismo vienés o de la filosofía analítica, no pertenecen a la psicología de cada individuo. Son mecanismos objetivos que constituyen la clave del proceso constructivo matemático y por los cuales se lleva a aceptar nuevos entes, nuevos sistemas de objetos matemáticos, aceptación que, como ya he indicado, a veces le cuesta, psicológicamente, al matemático. Y ello hasta el extremo que tales entes, o estructuras, pueden ser negados, no admitidos por algunos matemáticos. Sin llegar a estos extremos, son mecanismos que se manejan en cada porblema, por muy elemental que sea, y en cada demostración de un teorema. Y cada problema encierra todo un haz de hipótesis a contrastar, como he tratado de manifestar siguiendo el primer pasaje del *Menón*, que no son arbitrarias sino condicionadas por dicho problema. Hipótesis que han de realizarse siguiendo los mecanismos señalados en los párrafos anteriores.

El hacer matemático, basado en el método axiomático, es proceso que constituye un auténtico diálogo —no en el sentido de método dialógico de Lorenzen— en el cual se van discutiendo, analizando, generalizando o restringiendo las condiciones de cada teorema, de cada palabra, de cada hecho matemático. Y no arbirariamente, sino en función tanto del marco de cada hecho, como en función de las condiciones que el propio hecho impone. En este sentido la acusación de psicologismo realizada a la racionalidad constructiva matemática carece de sentido. Que unos manejen mejor y otros no los mecanismos que he mencionado no implica que dichos mecanismos sean subjetivos; implica que quien los maneja bien es un matemático.

Por supuesto que tales mecanismos no operan en el vacío, que quien los maneja ha de hacerlo en un contexto teórico, conceptual, determinado. No se puede razonar en el aire, sin unos temas, sin unos conocimientos previos, ya elaborados en el momento en el que ese matemático se incorpora a su trabajo. Y no solo con unos contenidos y temas, sino con unas orientaciones y unos problemas que están dados y planteados en ese momento. Así, no hay hoy ningún matemático que pueda sustraerse a las líneas establecidas por la escuela Bourbaki, aunque sólo sea para criticarlas e intentar superarlas.

Las palabras anteriores suponen la aceptación de la influencia del contexto histórico en el cual se stitúa el trabajador matemático, así como las condiciones incluso psicológicas del mismo. Pero no supone que tal contexto influya sobre la racionalidad conceptual constructiva matemática. Esta, desde sus orígenes, se ha situado en lo que cabría denominar como «espacio de lo posible», en el sentido de consistir en una permanente construcción de modelos o espacios acerca de unas estructuras. Estructuras que, creadas por el espíritu humano, por el «matemático social», pasan a tener unas cualidades ónticas que permiten su autodesarrollo y enriquecimiento, incluso de los mecanismos constructivos con los cuales han de tratarse. Pero, con ello, la elaboración de modelos hace que la caracterización epistémica queda relativizada, suprimiendo el carácter dogmático de la verdad. Con una precisión, que si bien una proposición no es verdadera en sí, sino según el modelo en el cual se interprete, y por tanto la verdad de la misma es relativa en el contexto total, dicha verdad es absoluta en el modelo en el cual se interprete, en el cual quede demostrada. El carácter dogmático del enfoque epistémico es propio de los enfoques de fundamentos, apoyados en la creencia de la verdad absoluta de unos primeros principios de los cuales resulta la verdad absoluta de las proposiciones derivadas.

Permanente construcción de modelos, de interpretaciones que entrañan, a la vez, que la racionalidad constructiva matemática sea autofundante. En otras palabras, que no cabe hablar de una fundamentación absoluta del hacer matemático como un objetivo externo a ese mismo hacer. Terreno de fundamentación absoluta que se ha pretendido realizar desde una descripción formal de la Matemática —así, desde el logicismo y los fundamentos lógicos— y que no ha tenido en cuenta el carácter abierto de construcción de modelos, por un lado. Por otro, que el mero hecho de la fundamentación sintáctica exige el empleo de una metamatemática más rica y amplia del sistema formal a fundamentar y que exige, por ello, de un tipo de mecanismo más complejo, sólo abordable desde su inmersión en el propio hacer matemático y, por consiguiente, mediante los mecanismos de ese hacer al que pretende fundamentar. Inmersión que es la que asegura que la racionalidad constructiva matemática sea autofundamentante.

JAVIER DE LORENZO
Universidad de Valladolid