Nota sobre el teorema de compacticidad en los sistemas formales

En el desarrollo de la Lógica formal dos han sido los enfoques preponderantes, aunque quizá nunca en estado puro: sintáctico, semántico. Complementarios, lo han sido en fluctuación. En Frege el modo central lo constituyó el sintáctico, mantenido por el primer Hilbert preocupado por los Fundamentos, en los entornos de 1904, y la Teoría de la demostración con su carácter finitista-constructivo, en los entornos de 1920. Corresponde después un predominio del semántico para, a partir de 1920, tras los trabajos de Wittgenstein y Lukasiewicz, volver al sintáctico. Y es Gödel, con la demostración del teorema de completitud, 1930, quien enlaza ambos enfoques mostrando que las limitaciones sintácticas pueden superarse mediante la semántica. Superación de limitaciones que permite la creación, desde Tarski, de una nueva rama de la Lógica: la Teoría de modelos, de gran alcance, mientras un enfoque más ligado al aspecto constructivo o combinatorio se acantona en los procesos recursivos y de calculabilidad.

Las limitaciones a que se hace referencia no son, por modo exclusivo, sintácticas. Cabe mencionar las que llevan ya nombres tópicos: a) El teorema de Löwenheim-Skolem, que prohibe obtener una teoría que caracterice lo infinito no numerable; b) El de incompletitud de Gödel, que prohibe obtener una teoría aritmética basada en un número finito de axiomas o esquemas de axiomas en la que toda proposición sea demostrable o refutable; c) los de definibilidad y verdad de Tarski que prohiben representar en un lenguaje la gramática de ese lenguaje); d) Los de Church, Kleene, Turing que prohiben construir en un sistema formal lo suficientemente potente un algoritmo de decisión...

El teorema de completitud de Gödel para sistemas formales de primer orden —si una fórmula es demostrable es válida, y recíprocamente— es generalizado posteriormente por Malcev e, inmediata consecuencia, se obtiene de él el teorema de compacticidad. Teorema cuya formulación puede establecerse en los términos:

> Sea X un conjunto de proposiciones; si todo subconjunto finito de X posee un modelo, entonces X posee un modelo.

Teorema que marca otra limitación al estilo de las antes formuladas: El teorema de compacticidad prohibe obtener una fórmula verdadera para todo conjunto finito y falsa para los conjuntos infinitos.

He dicho, consecuencia inmediata del teorema de completitud, el de compacticidad. Es consecuencia en la forma expositiva tradicional. Pero ello conduce a confundirlos con alguna otra proposición como puede ser la propia del teorema de Löwenheim-Skolem, principalmente si se establece en la forma de limitación. Y ello a pesar de que ambos teoremas hacen referencia a propiedades diferentes.

Igualmente, que se estime mera consecuencia del de completitud puede llegar a identificar el contenido de ambos. En este punto conviene precisar las diferencias entre los mismos. El de completitud establece una conexión entre las propiedades sintácticas o de derivación de un conjunto de proposiciones —establecidas las reglas sintácticas de derivación, por supuesto— y las propiedades semánticas o de modelo —de satisfacción mediante una interpretación de las fórmulas en una estructura—. Expresa unas propiedades que relacionan sintaxis y semántica .El teorema de compacticidad sólo hace referencia a los modelos de un conjunto de proposiciones X sin mencionar para nada las propiedades de derivación o demostración que en el mismo puedan establecerse.

La diferencia anterior, para ser marcada radicalmente, exigiría demostraciones independientes de ambos teoremas. Si, en general, las mismas no se hacen, se debe a factores estéticos y abreviadores, básicamente. Ahora bien, en la demostración independiente del teorema de compacticidad surge un breve problema: la elección del procedimiento para la misma, ya que al menos son dos los posibles caminos. El estrictamente topológico o el de carácter algebraico. Por el primero, el enlace con los espacios compactos y la propiedad que da nombre al teorema —dado por Tarski— se revelan con plena nitidez, pero la demostración exige el establecimiento previo del conjunto cociente de las proposiciones equivalentes —siempre fórmulas en las que ninguna variable presente inscripción libre— y las definiciones adecuadas de abiertos y cerrados para demostrar que, con ellas, el espacio es de Hausdorff y compacto; es demostración larga salvo que se apoye en el teorema de Tichonof que implicaría su enlace con el axioma de buena ordenación a través del axioma del producto. Por el segundo, el enlace se realiza mediante la teoría de filtros y ultraproductos, con demostración muy breve y elegante, pero a condición de demostrar previamente un teorema fundamental de ultraproductos, a pesar de lo cual posee un carácter más constructivo que la demostración realizada a partir de la completitud.

En cualquiera de los dos casos lo importante, aquí, no es la demostración en sí —puede verse, entre otros, en versión topológica orientada hacia el teorema de Löwenheim-Skolem pero de inmediata aplicación a este caso en (1), y en versión algebraica, por ejemplo, en (2), (3), (4)— sino los supuestos que la condicionan y sus equivalencias. Es en lo que me detengo en lo que sigue, porque la utilidad del teorema de compacticidad se apoya, en teoría de modelos, precisamente en la independencia respecto al concepto de derivación sintáctica, independencia realmente aparente, como indicaré en lo que considero resultado fundamental de esta Nota.

Por lo pronto, la hipótesis básica a realizar es que el conjunto X de proposiciones sea cerrado bajo las conjunciones o, en otras palabras, que posea la propiedad de intersección finita. Pero esta hipótesis equivale a que el filtro generado por X sea un filtro propio. Y desde un enfoque de Lógica algebraica ello equivale a admitir como hipótesis de partida que la teoría originada tomando como conjunto base X sea consistente. De lo contrario, no hay posibilidad de demostración.

Desde el ámbito del Algebra universal, se sabe que la propiedad de intersección finita para un conjunto X cualquiera equivale a la existencia en X de un operador algebraico de clausura (Cf.(5)). Pero dicho operador conduce, de modo inmediato, a la noción de derivación. Lo cual es importante destacar, porque si bien aparentemente la compacticidad actúa sobre los modelos de un conjunto X con independencia de la noción sintáctica de derivación, la misma se muestra como equivalente a la noción semántica de clausura, siendo ambos operadores paralelos.

El enlace con la completitud puede realizarse, de modo inmediato, aceptando el teorema de Lindenbaum de que todo filtro propio puede extenderse a un ultrafiltro o filtro maximal, que es la condición, precisamente, de la completitud para la teoría apoyada en el conjunto base X.

En relación con la topología: Un espacio topológico, para ser compacto, requiere la condición de intersección finita. Lo cual significa que dado un recubrimiento cualquiera puede extraerse un sobrecubrimiento finito. Por lo antes dicho, ello conduce a afirmar que la consistencia de X puede lograrse demostrando, únicamente, la de uno de sus subconjuntos finitos. En otras palabras, el teorema de compacticidad nos muestra, en su relación con la derivación, la verdadera naturaleza de ésta, su finitud. Es decir, cualquier derivación únicamente puede envolver un número finito de proposiciones. Resultado obtenido por la dualidad anterior, y por un enfoque de carácter fundamentalmente semántico.

Y es ese enlace el que posibilita caracterizar a los sistemas lógicos de primer orden mediante la compacticidad unida a la propiedad de carácter más puramente conjuntista dada por el teorema de Löwenheim-Skolem, en el sentido de que, por la demostración de Lindström de 1969, cualquier sistema formal que satisfaga el teorema de compacticidad y el de Löwenheim-Skolem ha de ser isomorfo a la Lógica de primer orden.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. BETH: *Les fondements logiques de la mathématique*. Gauthier-Willars. 1955 2, pp. 84 ss.

2. CHANG-KEISLER: *Model theory*. North-Holland 1973, pp. 172-3.

3. GRATZER: *Universal algebra*. Van Nostrand 1968, p. 242.

4. MOSTOWSKY: *Thirty years of foundational studies*. Acta Philosophica Fennica XVII, Oxford. B. Blackwell, 1966, p. 152.

5. JONSSON: *Topics in Universal algebra*. Springer, L.N.M. 250, 1972. pp .89 ss.

JAVIER DE LORENZO