Lógica y matemática en K. Gödel

En todo ensayo de Ciencia ficción se hacen obligadas unas palabras liminares que aseguren al lector que lo narrado es verídico. Palabras liminares que, en el caso de este ensayo, por versar acerca de Lógica y Matemática, no pueden asegurar al lector la veracidad de lo que en él se narra. Muy al contrario, es obligado afirmar que todo lo que en este ensayo se lea es falso.

Palabras liminares que, aquí, deben indicar que el escrito se pretende como un homenaje al matemático austríaco Kurt Gödel (*). Se intenta exponer —tras un muy breve y esquemático encuadre— tanto las contribuciones como los métodos creados por Gödel y, sobre todo, algunas consecuencias y perspectivas que los mismos provocan. No todas, ni siquiera las que se exponen, en su cabal desarrollo. Con la advertencia de que algunos teoremas van demostrados —no en la forma original plasmada por Gödel, sino en la línea producida por una perspectiva posterior—; otros, sólo esbozada su demostración; los más, únicamente en su enunciado.

Las referencias bibliográficas, cuando son de Gödel, únicamente se indican por la fecha de su publicación. Al final de algunos parágrafos se agregan la de aquellos autores que más directamente han sido manejados. En especial debo mencionar Kneebone 1963, de Lorenzo 1974, Monk 1976, Mostowski 1966.

(*) Efectivamente el trabajo se escribió con ocasión de la muerte de K. Gödel, hace ya más de año y medio, pero no ha podido imprimirse hasta el presente.

A. Encuadre

1. *Los Fundamentos de la Matemática y su crisis*

En el último tercio del siglo XIX y en el interior pero a la vez frente a la corriente de Aritmetización del Análisis, surge el uso —y abuso en el decir de Frege— de términos como «conjunto» y «aplicación». A partir de 1870 ambos términos se harán característicos de un nuevo modo de enfrentarse con el objeto matemático, modo que enfoca las globalidades como dadas en acto y de antemano. Quiero decir, en lugar de partir del objeto hacia el conjunto, se va a tomar como punto de partida el conjunto y, a su través, el elemento individual. Es un nuevo modo de hacer matemático que Clifford plasmará en 1872 indicando que la «matemática moderna» es aquella cuyo objeto es el «conjunto» y la «función» entre conjuntos. Enfoque inverso al existente entre los matemáticos hasta esas fechas, que obliga a la creación de nuevos operadores y de nuevos modos de demostración. Nuevo enfoque de la Matemática que va a tener como portavoces adelantados a Dedekind y Cantor, a Frege y Peano; como oponente irreconciliable, a Kronecker.

Corresponde a Cantor la plasmación de la teoría intuitiva de conjuntos desde 1874. Su creación supone la definitiva cristalización de una ruptura epistemológica en el hacer matemático, un cambio en dicho hacer. En primer lugar, la teoría intuitiva de conjuntos influye de manera decisiva en el total de la Matemática. Y ello porque prácticamente toda la Matemática de su tiempo y la construida tras él puede estimarse como una parte de la teoría intuitiva de conjuntos —con más precisión, hoy debería indicarse que las teorías matemáticas encuentran modelos conjuntistas—. Su primer éxito se centró en la sistematización de la teoría del número real y, con ella, de la teoría de funciones de variable real. Exigió, este éxito, la creación de las nociones topológicas ligadas al cuerpo de los números reales. Nociones topológicas que no incluían, sino todo lo contrario, las ideas «intuitivas» de los creadores del Cálculo, Leibniz y Newton, eliminándolas de todo el hacer matemático. Quiero decir, el nuevo enfoque globalizador impedía hablar de la metafísica de los infinitésimos.

En segundo lugar, y en contrapartida al éxito, la teoría intuitiva de conjuntos planteó toda una serie de problemas, ligados al cambio de estatuto ontológico del objeto matemático. Teoría intuitiva originada por la inversión respecto al enfoque matemático anterior. Consecuente con la inversión, la teoría intuitiva de conjuntos va a constituir una auténtica teoría del infinito actual. Frente a la aritmetización constructiva en la cual, como Gauss señalara, el término infinito no constituía sino una forma de hablar en la que no se admite la totalidad que implica el término, la teoría de conjuntos es tal que lo primero, en ella, es el infinito actual escindido en una escala de infinitos y, después, se constituye lo finito, como mero rincón de lo infinito.

La inversión no afecta a tan sólo el objeto y a nuevos modos de operación con el mismo —uniones, intersecciones, complementación, potenciación, n-tuplas ordenadas...—, sino a los métodos de manejarlo: Métodos de definición y demostración —como el de la diagonal, el de elección— que son, como los calificara Poincaré, impredicativos. Impredicatividad, autorreferencia o círculo vicioso que se manifiesta en el manejo de la autorreferencia tanto para caracterizar al objeto como para la demostración de las propiedades de los mismos, dado que cada objeto se caracteriza en función de la totalidad a la cual dicho objeto pertenece. Impredicatividad que es consustancial al nuevo modo de hacer, porque el mismo parte, como señalara Poincaré, de la admisión de una hipótesis existencial muy fuerte: la que asegura la existencia del infinito, hipótesis que se reflejará en la formulación axiomática mediante el axioma de comprehensión.

Partiendo del mismo contexto que Cantor, Frege intenta clarificar los dos términos que los matemáticos «modernos» utilizan sin precisión: los de «conjunto» y «aplicación». En ese intento clarificador Frege adopta una posición previa: clarificar es definir, rigurosamente, y ello no es sino una labor estrictamente lógica. De aquí que Frege reemplace los dos términos anteriores por los que califica más rigurosos conceptualmente: «concepto» y «relación». Frege, en su intento, tiene que sistematizar, en primer lugar, aquello en lo cual clarificar y definir los términos matemáticos. Frege tiene que crear la Lógica formal adecuada. Y así establece en primer lugar el Cálculo proposicional y, después, el Cálculo de predicados. Realizada esta labor, el segundo paso es definir todos los conceptos matemáticos en términos de estos sistemas lógicos comenzando por las nociones de la Aritmética, por el concepto de número natural. El segundo paso consiste en reducir la Aritmética, la Matemática, a la Lógica. Frege ha adoptado la misma posición, en el fondo, que Cantor: ha invertido, estimando por ejemplo, que el número natural debe ser definido en términos de «concepto» y «relación» frente a la idea de que el número natural es lo más simple.

Por caminos paralelos, tanto Cantor como Frege pretendieron dar un fundamento a todo el hacer matemático. Toda la Matemática podía ser apoyada en la teoría intuitiva de conjuntos o bien en un cálculo de lógica formal. Sin embargo, la aparición de las antinomias a últimos de siglo y primeros de éste mostraron que la teoría de conjuntos era inconsistente, contradictoria. Y que la inconsistencia se apoyaba, por un lado, en el uso de la impredicatividad, de la autorreferencia, obligada al anteponer el infinito actual; por otro, en el hecho de admitir que toda propiedad caracteriza a un conjunto, el formado por aquellos elementos que satisfacen dicha propiedad, y que constituye el postulado de abstracción. Las antinomias afectan por igual al sistema fregeano, versión paralela a la conjuntista, si se enfoca extensionalmente.

2. *Intentos de solución*

Que la teoría intuitiva de conjuntos se mostrara inconsistente significaba, para la Matemática, una auténtica crisis. Y ello porque todas las nociones matemáticas conocidas podían estimarse como partes de la teoría de conjuntos, enfocada, así, como base o fundamento —y análogamente si se pretendiera en el enfoque fregeano, logicista—. De aquí que fuera el total de la Matemática el que se manifestara contradictorio. Crisis no sólo de la Matemática o afectando a tan sólo la Matemática. Porque si en principio ningún matemático estaba dispuesto a renunciar a lo ya logrado, tampoco los científicos, dado el uso que de la Matemática hacían, querían renunciar a tal herramienta, la más segura de las conocidas y clave para su propia teoría científica. Renunciar a la Matemática por inconsistente, por contradictoria, equivalía a renunciar a toda la ciencia; parecía un precio excesivo.

Sin plantearse el problema o admitiendo la posibilidad de que otros demostraran la consistencia, muchos matemáticos prefieren continuar su trabajo, sin abandonar nada de lo hasta entonces obtenido. Puede calificarse como posición del pragmático quien, si piensa, piensa que ya habrá otros que resuelvan el problema. Una segunda postura es la de quienes, de modo efectivo, acuden a investigar, primero, las causas para, después, intentar poner los remedios con los que enderezar o superar las contradicciones; medios en los cuales se irán desarrollando nuevos conceptos y métodos matemáticos; en otras palabras, se irá haciendo matemática. Es la posición de quienes se ocupan en dar un fundamento lo más seguro posible al hacer matemático, o una justificación al mismo.

Tras un período de polémicas que pretenden aclarar las causas de las antinomias, en los entornos de 1908 cristalizan tres intentos de solución con sus previas cargas ontológicas: a) Logicismo; b) Constructivismo; c) Axiomatización y Formalismo.

a) El Logicismo viene representado fundamentalmente por Russell, y su deseo se centra en modificar lo menos posible lo ya logrado por Frege. Como una de las posibles vías superadoras, Russell crea la teoría de los tipos al admitir, tras Poincaré, como una de las causas de la crisis la impredicatividad. Línea de Russell en la que colabora, y de modo esencial, Whitehead, culminando en la composición de *Principia Mathematica*. Los dos objetivos de Frege intentan ser plasmados en esta obra. Sin embargo, Russell-Whitehead deben introducir, en cuanto a la construcción del sistema lógico, y junto al axioma del círculo vicioso, el axioma de reducibilidad, que no va a ser otra cosa que la puerta falsa por donde penetra la impredicatividad que quieren eliminar; y en cuanto al segundo objetivo, reducción de la Matemática al sistema lógico construido, han de aceptar dos axiomas cuyo carácter lógico es inexistente, dado su contenido fáctico, existencial: el del infinito y el de elección. Además, y como Gödel señalara (1944), no hay separación alguna entre sintaxis y semántica ni especificación consecuente de las reglas de formación de fórmulas ni de las reglas de derivación...

Obra fundamental, PM repercute básicamente en lo que no era su objetivo quizá central, repercute en la adopción de su axiomatización de la Lógica al menos en los círculos matemáticos. En los círculos filosóficos influye quizá más decisivamente en cuanto a hacer patente la necesidad de precisión en el lenguaje a utilizar y que, siguiendo la línea fregeana, cristaliza en las corrientes analíticas del lenguaje. Corrientes diversas que llevan a declarar que la significación constituye el problema central filosófico del siglo XX. Corrientes que, por otro lado, no participan de modo esencial en el desarrollo interno de la Lógica, sino que meramente se sirven de la Lógica como instrumento o herramienta para intentar resolver los problemas del lenguaje filosófico, provocando una relación entre Filosofía y Lógica al estilo de la existente entre la Física y la Matemática. En otras palabras, se adopta un enfoque analítico de la lógica que va a desembocar, tras Wittgenstein, en una concepción puramente lingüística, en un enfoque de la Lógica y de sus principios como meros juegos de lenguaje, abandonando el aspecto interno, riguroso —calificado de meramente técnico— por el especulativo, lo que va a provocar, en más de una ocasión, fallos respecto a temas y resultados básicos de la Lógica.

b) Las corrientes constructivistas son muchas y, a veces, no muy de acuerdo entre sí. La más conocida en los terrenos de la crisis es la sostenida por los intuicionistas, el ala más radical, los bolcheviques de la Matemática como los calificara Ramsey. Para ellos la Matemática es una pura construcción intuitiva del matemático, primaria e irreducible a cualquier otro campo. La crisis se resuelve creando otra Matemática que, apoyada en la aritmética como dato primario, esté libre de la impredicatividad y, por consiguiente, de cualquier tipo de contradicción. Desde este punto de vista, los intentos de demostrar la consistencia, por ejemplo, carecen de sentido, al igual que carece de sentido el propio problema de los fundamentos. Desde este punto de vista, definir es dar un medio de construir, de modo efectivo y en un número finito de etapas, el objeto definido. El infinito actual, por supuesto, no existe; menos aún, las distintas escalas de transfinitos. Y los principios de razonamiento —así, el de tercero excluido— son válidos únicamente para conjuntos finitos y perfectamente determinados, sin ser válida su extrapolación más allá de la finitud estricta.

Sin llegar a la postura radical intuicionista, que exige la reconstrucción total de la Matemática conocida, pueden situarse constructivistas como Poincaré, Weyl, Skolem. Dadas las repercusiones en el trabajo posterior de la Lógica, debo reseñar, brevemente, el papel del matemático noruego.

Skolem rechaza la construcción formal-logicista de PM por su carácter no constructivo, ya que hace uso libre de los cuantificadores existencial y universal, por lo cual fórmulas como $\forall x\alpha(x)$ o $\exists x\alpha(x)$ no son decidibles cuando el dominio de individuos no es finito. Según Skolem, las expresiones aritméticas pueden ser tratadas con sólo variables libres y no como proposiciones puras, como proposiciones en las cuales todas las variables aparecen acotadas. Variables aparentes, además, con sólo un dominio finito de variación. Por otro lado, siguiendo a Poincaré, en el desarrollo formal de la Aritmética debe apoyarse el matemático en las definiciones recursivas y en el método de inducción.

Skolem lleva adelante su programa —tanto crítico como constructivo— de manera pública desde 1920. En ese año aparece su demostración de un teorema de Löwenheim por el cual si una fórmula del cálculo de predicados de primer orden es satisfacible, entonces es χ_0-satisfacible. En el proceso demostrativo Skolem prueba que toda fórmula bien formada del cálculo de predicados de primer orden tiene una forma equivalente que consta de todos los cuantificadores situados en primer lugar seguidos por la matriz libre de cuantificación. Es la forma que hoy recibe el nombre de forma normal de Skolem y constituye una de las herramientas centrales del aparato lógico —fundamentalmente en los terrenos de la decidibilidad tras los trabajos de Tarski—. Forma normal que usarán tanto Herbrand como Gödel para enfrentarse con el problema de la completitud que se encuentra prescrito, aunque no explícito —en terminología de Galois— en el ensayo de Skolem 1922.

El matemático noruego, a partir de la generalización del teorema de Löwenheim-Skolem demuestra, en 1923, que la teoría formalizada de conjuntos, la teoría de Zermelo, posee un modelo numerable, lo que da paso a la llamada «paradoja de Skolem»; como los números naturales pueden ser definidos en términos conjuntistas, ello le conduce a ver la posibilidad de que puedan construirse dos sistemas diferentes de números naturales. Posibilidad que conseguirá demostrar, de manera efectiva, en 1934, construyendo un modelo no canónico de los números naturales.

Naturalmente, Skolem explota ampliamente las discrepancias entre el enfoque constructivo por el que expone la aritmética apoyada en las funciones recursivas, y la imposibilidad tanto de su axiomatización como de su formalización, mostrando la no categoricidad de la teoría de conjuntos. Desde este último enfoque, en el que Skolem llega a completar la axiomática conjuntista de Zermelo y darle la forma canónica en el sistema que hoy recibe el nombre de Zermelo-Fraenkel y que más justamente debería recibir el de ZFS, afirmará que la teoría de conjuntos es incapaz para resolver cuestiones referentes a la cardinalidad y, en particular, es incapaz de resolver la hipótesis del continuo. Por la relatividad de las nociones conjuntistas —interpretación del matemático noruego respecto a la paradoja de su nombre—, debe buscarse el apoyo en otros métodos y éstos no pueden ser más que los basados en la inducción. Y una defensa de la inducción completa, frente a Hilbert, se encontrará en el parágrafo 7 de su ensayo 1922, previo a la publicación de su Fundamento de la aritmética recursiva en los modos inductivos de razonamiento, de 1923.

c) Junto a la línea constructivista, la de mayor repercusión entre los matemáticos vino dada por la posición de Hilbert y su escuela. En ella se deben distinguir, en primer lugar, el enfoque de pragmática matemática y el enfoque de justificación —que no de fundamento— de dicha pragmática. A su vez, la primera debe escindirse en dos planos: por un lado, el puro hacer matemático, con los métodos que a cada matemático se le ocurran —aproximación, analogía, reducción al absurdo, inducción finita o transfinita...—, y por otro lado, la sistematización y ordenación de ese hacer. Sistematización que se apoya, básicamente, en el método tradicional matemático, el método axiomático o hipotético-deductivo.

Para los hilbertianos ninguna proposición aislada tiene sentido alguno; las proposiciones —sean o no de la Matemática— sólo alcanzan su sentido en el interior de una teoría. A su vez, una teoría sólo adquiere una forma organizada si se presenta en forma axiomatizada. La Matemática, para Hilbert, muestra un carácter modélico en este campo porque permite que sus distintas teorías aparezcan sistematizadas, organizadas. Constituyen, tales teorías, el desarrollo de unos axiomas caracterizadores de la misma. Y por este carácter modélico, las restantes disciplinas científicas deben tender a estructurarse como teorías axiomáticas, con lo cual alcanzarán un grado de desarrollo óptimo —y tal constitución, al menos de las teorías físicas, la incluye Hilbert como uno de los problemas matemáticos en su programa de 1900—. Debo precisar que las teorías axiomatizadas matemáticas constituyen un hacer, un trabajo matemático, por lo cual continúan siendo creaciones, construcciones mentales, en el tiempo, del matemático. Como tales, en ellas cualquier procedimiento es válido, como productos de la imaginación. Deseo resaltar este punto porque se han provocado grandes distorsiones al hablar del «formalismo hilbertiano», olvidando esta faceta. La escuela formalista coincide con el constructivismo al señalar que la Matemática, más que un producto de la razón lo es del intelecto y, sobre todo, de la imaginación, porque la Matemática afinca sus raíces en lo simbólico, no en lo sígnico. De ahí que posea un contenido pero no un referencial y no pueda hablarse de la abstracción de lo concreto material, sino de lo simbólico. Es posición opuesta al logicismo, de realismo extremado. Frente al carácter naturalista empírico del matemático logicista, el matemático formalista se considera en el mismo plano de creación que el artista. Consecuentemente, el reino de la Matemática es el reino de la libertad creadora imaginativa.

Ahora bien, la imaginación, como ya señalara Goya en uno de sus grabados, crea monstruos. Y uno de esos monstruos es, precisamente, el infinito actual. De aquí que, para controlar tales monstruos, para justificar el hacer matemático, Hilbert imponga un segundo tipo de hacer matemático, justificacionista. Y este enfoque debe ser tal que prohiba la aparición de dichos monstruos o al menos los controle. De lo contrario no podría hablarse de justificación alguna. Debe apoyarse, así, en el formalismo sintáctico, prácticamente empírico, con manejo de marcas concretas, de símbolos en el papel o sonidos discretos. Incluso en 1904 Hilbert llega a rechazar la inducción completa como método estrictamente finitista, intentando mostrar que puede prescindirse de este procedimiento. Lo cual es imposible como le criticara Poincaré y tendría que aceptar, no de muy buen grado, el propio Hilbert.

El enfoque justificacionista estará constituido por la Metamatemática o teoría de la demostración, en la que se construyan sistemas formales, sintácticos, sobre los cuales el matemático razone de manera segura, es decir, de manera finitista. Para ello se deberán traducir a lenguaje formal las teorías axiomatizadas. Traducidas, el objetivo se centrará en demostrar, sintácticamente, por «métodos finitistas» —que nunca serán especificados de modo preciso—, una serie de condiciones epistemológicas que parecen deseables que toda teoría, matemática o no, posea. Fundamentalmente, por condición esencial para evitar nuevas crisis, la *consistencia*, es decir, que dada una proposición escrita en el lenguaje del sistema formal, no puedan encontrarse, en él, tanto esa proposición como su negación. A esta condición central para el programa justificacionista se agregan la de *completitud*, es decir, que toda proposición que sea válida en la teoría axiomática pueda ser demostrada en el sistema formal, y recíprocamente; y la de *decidibilidad*, que pueda encontrarse, en un número finito de pasos, una demostración de toda proposición del sistema formal.

Requisitos epistemológicos que han de poder demostrarse del sistema formal que traduzca sintácticamente la teoría que se esté considerando. De esta manera, aunque en el hacer matemático se maneje el infinito actual, como un elemento trascendente en el mismo sentido a como se manejaron los elementos imaginarios —los complejos, las rectas isótropas...—, en la metamatemática el infinito actual no estará presente de una manera directa y, por ello, si se demuestran las condiciones anteriores, podrá quedar justificado el hacer pragmático matemático, evitándose, a la vez, las antinomias, las contradicciones.

Es programa que obliga, en primer lugar, a la caracterización estrictamente sintáctica de «sistema formal» o «teoría deductiva» construida sobre un lenguaje formal determinado. Así, un sistema formal tendrá que venir dado en función de un lenguaje con su vocabulario básico que habrá que especificar; la construcción de las fórmulas o expresiones como sucesiones de símbolos del lenguaje, sucesiones que, en principio, se admiten únicamente finitas; la especificación de los axiomas —tanto de los considerados comunes a todas las teorías sobre un mismo lenguaje como los específicos a la teoría a considerar—; especificación explícita de las reglas de demostración o derivación formal, como aplicaciones del conjunto de fórmulas por sí mismo n-veces en el conjunto de fórmulas. Realizada la descripción del sistema formal, caben dos opciones: desarrollar proposiciones internas al sistema formal —labor del lógico; demostrar las condiciones epistemológicas de dichos sistemas, condiciones que pertenecen a la metateoría —labor de justificación metamatemática o metalógica—.

De esta manera se produce una dicotomía en el hacer matemático: por un lado, para el hacer pragmático basta la axiomatización material; por otro, para tratar de la metamatemática, hay que construir sintácticamente dicho sistema formal. Ahora bien, una vez construido, puede razonarse como en el nivel matemático, pero teniendo ahora como nuevo objeto el sistema formal. Y ello va a implicar, a muy corto plazo, la absorción de los sistemas formales de la Lógica por la matemática pragmática.

A pesar del carácter finitista del programa de Hilbert, este programa no es estrictamente constructivo, porque ya la traducción de las proposiciones matemáticas a lenguaje formal puede no trasladar completamente lo que en dichas proposiciones se contiene. Crítica válida, igualmente, para la propia axiomatización material. Además, si se tiene un sistema formal T, mediante la metateoría MT se puede justificar T; pero esta metateoría puede, a su vez, ser formalizada y ello exigiría otra metametateoría. Habría que evitar el regreso al infinito o la justificación carecería de absolutismo. A este punto se agrega la condición de que las pruebas de consistencia relativa, por ejemplo, no harían otra cosa que remitir el problema de la consistencia de la teoría que se tome como apoyatura; lo cual ya había realizado Hilbert en sus *Fundamentos de la Geometría*. De aquí la necesidad, en el programa hilbertiano, de demostraciones finitas de consistencia que puedan hacerse interiores al sistema formal. Obligaba, esta necesidad, a desarrollar el aparato lógico pero no como un aparato independiente sino íntimamente ligado, en el mismo plano y función, al hacer justificacionista matemático.

B. GÖDEL Y LA LÓGICA MATEMÁTICA

El trabajo realizado por la escuela hilbertiana, así como el de algunos constructivistas como el citado Skolem, permite que en los alrededores de 1930 puedan estudiarse no ya proposiciones aisladas o seguir las discusiones en términos más o menos vagos o intuitivos, sino que se tomen tanto las teorías axiomáticas como el propio sistema formal como nuevo objeto de estudio, de trabajo. Y entre los sistemas formales hay que incluir los distintos sistemas lógicos. El contexto de 1930 se asemeja al que indiqué al comienzo como existente en los entornos de 1875. En lugar del criterio de globalización se tiene ahora el de sistemas formales caracterizados por el conjunto de sus axiomas. Y es en este contexto en el que aparecerán figuras como las de Tarski, Gödel, Herbrand..., en competencia para la resolución de las cuestiones epistemológicas, pero ya participando —de alguna manera— en el nuevo enfoque lógico-matemático. Enfoque que cristalizará, ya de modo definitivo, en los entornos de 1939 en que una nueva ruptura epistemológica hace que el objeto matemático deje de ser el «conjunto» y la «aplicación» para pasar a convertirse en la «estructura», combinación de estructuras y «morfismo» entre las mismas.

1. *Completitud de L_1*

Nacido el 28 de abril de 1906 en Brno, ciudad austrohúngara entonces y hoy checoslovaca, presenta Gödel su disertación doctoral en la Universidad de Viena en 1930 bajo la dirección del gran matemático Hans Hahn, miembro del Círculo de Viena y de tendencia constructivista, aunque ligado, en parte, al círculo de Hilbert. El grado de Doctor lo obtiene Gödel el 6 de febrero de 1930 y la tesis consiste en la demostración de «La completitud de los axiomas del cálculo funcional de Lógica». Una versión de dicha tesis la publica el mismo año 1930.

En terminología y simbolismo adopta Gödel los de Hilbert-Ackermann 1928, donde el sistema axiomático para el cálculo restringido de predicados es el de PM simplificado por Bernays, acompañado de la especificación de las reglas de derivación, no contenidas en PM. Como Gödel señala, Bernays había logrado demostrar en 1926 la completitud del Cálculo proposicional. Problema de completitud que Gödel plantea en los términos siguientes: Es concebible que existan proposiciones verdaderas —demostradas por otros principios que no sean los del sistema de axiomas— y que, sin embargo, no puedan ser derivadas en el sistema en consideración. La completitud asegurará que tal cuestión no es posible, es decir, asegurará que cualquier fórmula del cálculo de predicados de la que pueda admitirse su verdad por otros medios se sigue de los axiomas del cálculo. Y es la demostración de tal completitud el objetivo del ensayo de Gödel. Objetivo que se formula en el

Teorema I: *Toda fórmula válida del cálculo funcional restringido es demostrable.* En simbología posterior: $\models \alpha \Rightarrow \vdash \alpha$

Tras admitir que toda fórmula puede expresarse en forma normal de Skolem, Gödel demuestra la equivalencia de este teorema con el

Teorema II: *Toda fórmula del cálculo funcional restringido es o refutable o satisfacible.*

Y con una advertencia: satisfacible en un dominio numerable de individuos; al igual que en el teorema I, la validez se toma en un dominio numerable de individuos. La demostración se realiza en proceso semejante al de Skolem 1920 para el teorema de Löwenheim-Skolem, como anotará posteriormente el mismo Gödel, y consiste en reducir el grado de la forma normal, para lo cual debe utilizar el lema del infinito de König.

Por el uso del lema anterior, por la conexión obligada que se realiza entre la demostrabilidad sintáctica y la deducibilidad semántica, la demostración no es, no puede ser constructiva, aunque Gödel haga la advertencia de que al demostrar que «válido» es lo mismo que «demostrable», el teorema de completitud contiene una reducción de lo no-numerable —a que hace referencia lo válido—, a lo numerable —a que hace referencia lo demostrable—, cuestión importante para el problema de decisión y que no es otra cosa que la formulación del teorema de Löwenheim-Skolem.

Gödel da dos consecuencias de su teorema. En primer lugar, lo generaliza para el Cálculo de predicados con igualdad, aunque manteniéndose en lo numerable. En segundo lugar, demuestra, por métodos semánticos, su Teorema X, y que no es otro que el

Teorema de Compacticidad: *Para que un sistema de fórmulas infinito numerable sea satisfacible es necesario y suficiente que todo subsistema finito sea satisfacible.*

Aunque la demostración no presentara un carácter constructivo, constituía un éxito del programa hilbertiano, en principio. En Hilbert-Bernays 1939 se da una demostración de carácter metamatemático mediante la aritmetización posterior, estableciendo que si una fórmula es irrefutable en el cálculo de predicados de primer orden, es irrefutable en todo sistema consistente S que permanece consistente cuando a los axiomas de la teoría de números se le agregan los axiomas de S. Línea seguida y generalizada por Wang desde 1951.

Desde un enfoque más constructivo, la demostración debería seguir la línea más cercana a la contenida implícitamente en Herbrand 1931, aunque establecida en 1929, del contraejemplo, y que formalizarán independientemente entre sí, Beth, Schutte..., en los entornos de 1954. Entornos en los cuales también se establece la demostración de carácter algebraico de este teorema de completitud.

En principio la demostración del teorema pudo estimarse como mera fase para el cumplimiento del programa hilbertiano. Sin embargo, tras la demostración de incompletitud de la Aritmética formal y de las Lógicas de orden mayor que 1, se va a convertir en una de las claves para la teoría de modelos creada por Tarski, donde importan menos los problemas epistemológicos como problemas externos de los sistemas formales, que las relaciones que puedan existir entre un sistema formal y una interpretación, un modelo del mismo, o las relaciones entre distintos sistemas formales; con lo cual dichas condiciones epistemológicas quedan interiorizadas al trabajo lógico matemático. Importancia de la completitud desde la perspectiva tarskiana, de enfoque más semántico.

El teorema fue generalizado por Mal'cev en 1936 para conjuntos no numerables y por el propio Tarski, aunque la demostración que hoy se sigue, prácticamente la canónica, sea la establecida por Henkin en 1949, y que hace uso de la extensión de lenguajes. Teorema generalizado de completitud, de carácter global, que puede enunciarse en los términos:

Un sistema de proposiciones de un lenguaje L es completo si y sólo si posee un modelo, es decir, si y sólo si es satisfacible.

Hay que observar un hecho inmediato: La completitud de un sistema se liga a la consistencia, y el enunciado anterior se mantiene correcto, si se reemplaza el término «completo» por el de «consistente». Ello refleja el método de demostración de consistencia semántica mediante la exhibición de un modelo. Método que por analogía recuerda los utilizados en Matemática desde Descartes.

Consecuencia de este teorema y del más operativo y estrictamente semántico de compacticidad o finitud es el hecho siguiente:

Si una teoría tiene un modelo infinito, entonces dicha teoría posee modelos de cualquier potencia infinita.

Esta proposición, precisamente, constituye el teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski que, junto a la compacticidad, van a caracterizar a las lógicas de primer orden en el sentido de que ninguna extensión de las mismas poseerán estas dos propiedades, como ha demostrado Lindström en 1969.

Mera aplicación, pues se tiene el hecho de que la teoría formal de la Aritmética, al tener como modelo el de los naturales, que es infinito, tiene que poseer modelos de cualquier otro cardinal. Es decir, existen modelos no canónicos de la Aritmética —concretamente $2^{\aleph_0}$ modelos numerables—, aunque no recursivos, no isomorfos entre sí.

2. *Proposiciones indecidibles*

Gödel no iba, sin embargo, en la línea de la teoría de modelos. Continúa ligado a los problemas de la metamatemática. Y el paso siguiente a su demostración de completitud del cálculo de predicados de primer orden se centra en el esfuerzo por demostrar tanto la completitud como la consistencia de la Aritmética formal. El 23 de octubre de 1930, Hans Hahn presenta un abstracto en la Academia de Ciencias de Viena: «Algunos resultados metamatemáticos sobre completitud y consistencia». Y el 17 de noviembre del mismo año Gödel envía el original, que se publica en 1931, del más famoso de sus trabajos, el que contiene *el* teorema de Gödel: «Sobre proposiciones formalmente indecidibles de PM y sistemas relacionados con él».

El cambio de título del abstracto al texto completo es significativo y más si se lee la Exposición introductoria de Gödel. En ella hace referencia, fundamentalmente, a uno de los objetivos centrales que atribuye al proceso formalizador: probar cualquier teorema de forma mecánica; es decir, resolver el problema de decidibilidad. Gödel afirma que la posición formalista entraña la conjetura de que los axiomas y las reglas de inferencia constituyen los instrumentos suficientes para decidir cualquier cuestión matemática formalmente planteada. Y el resultado de su trabajo es demostrar que dicha conjetura es falsa, que el objetivo planteado en la misma es inalcanzable en todo sistema formal que satisfaga unas ciertas condiciones. Y lo es porque pueden construirse proposiciones indecidibles, es decir, proposiciones tales que ni ellas ni su negación son demostrables en el interior del sistema formal, a pesar de lo cual pueden interpretarse semánticamente como verdaderas. Consecuencia inmediata de esta indecidibilidad es la incompletitud de los mismos, al igual que la imposibilidad de demostrar la propia consistencia. Pero bien entendido que estos teoremas se van a presentar como mera consecuencia de la construcción de proposiciones indecidibles. Es el giro que muestra el cambio de título. Y es la clave del cúmulo de originalidades que se encuentran en el trabajo de Gödel, hasta el punto de que lo importante no es ya el resultado, los teoremas en sí, sino los métodos construidos para alcanzarlos.

Resalto que lo importante son los métodos en sí, más que los propios teoremas —con ser importantes, básicos, ciertamente—. Métodos que permiten construir, de modo efectivo, proposiciones indecidibles en ciertos sistemas formales, aquellos que contengan no sólo variables sino nombres para las mismas. Sistemas en los cuales pueda hablarse de ellos mismos. Y que, por consiguiente, traten de mantener el mismo papel que el lenguaje ordinario, autorreferente. Gödel ejemplifica esta construcción para el sistema formal de la Aritmética P, construido con los axiomas de PM más los de Peano, aunque tales resultados se verifican para la teoría de conjuntos, para toda la Matemática.

Exposiciones de los teoremas de Gödel hay muchas, y aquí voy a dar una apoyada en las repercusiones del trabajo gödeliano, aunque ciertamente la mejor exposición sea la del propio Gödel, por la riqueza de ideas que entornan su construcción. Lo que pretendo es seguir el hilo del ensayo original, pero intentando destacar las ideas centrales y, fundamentalmente, las consecuencias que los métodos han provocado, a pesar de que, con ello, no siga una marcha lineal expositiva.

Y lo primero que debe hacerse es la descripción estrictamente sintáctica del lenguaje y del sistema en el cual se intente formalizar la teoría matemática a considerar. Los elementos de dicho lenguaje son símbolos que se escinden, en el vocabulario base V, en símbolos de variables, constantes lógicas, símbolos de predicado y de operaciones... Inmediatamente, se especifican las sucesiones de símbolos. De entre ellas se toma un subconjunto, definido inductivamente, de fórmulas F. Se establecen unas fórmulas como configuraciones de partida —siempre cerradas, o proposiciones—, como axiomas A. Y se define la derivación o A-demostración formal como sucesión de proposiciones obtenidas de las anteriores, del conjunto A de axiomas, mediante la aplicación de las reglas de derivación R. Estas reglas, en general, se reducen al modus ponens, si en lugar de manejar los símbolos directamente, se manejan variables sintácticas, lo que da paso a tratar con esquemas de axiomas en lugar de con los axiomas en sí. A pesar de lo cual el cardinal asociado a este esquema de axiomas es recursivo —es decir, dada cualquier configuración se puede averiguar en número finito de etapas si la misma es o no una concreción del esquema—. De esta forma, el sistema formal queda caracterizado por la terna <F, A, R>.

2.1. *Teoría de la recursividad*

Una vez realizada la etapa descriptiva sintáctica —que se muestra esencial para cualquier tipo de trabajo en Lógica—, y en la que Gödel adopta como base la axiomatización de PM, con su teoría de tipos, con lo cual no necesita hablar de relaciones, por ejemplo, que vienen dadas por variables del tipo 3 cuyo recorrido se encuentra en las clases de clases de números naturales, viene la originalidad metódica de Gödel: Aplicar el sistema formal P descrito en los números naturales. Es lo que se denomina proceso de *aritmetización de la sintaxis* o gödelización. Para ello construye una función g que asigna a cada elemento s de V un número natural gs, y ello de modo único. Esta función existe por el hecho de que el conjunto de fórmulas tiene la misma potencia que el conjunto de números naturales, al aceptar que el conjunto V es, a lo sumo, numerable y que las fórmulas construidas en L son de longitud finita.

Establecida la función g se hacen dos extensiones conservadoras de la misma: la primera, a las fórmulas; la segunda, a las derivaciones. En concreto: Sea g la aplicación —en adelante, gödelización— por la que a cada símbolo s del vocabulario V se le asocia un número natural cuyo numeral represento por gs. Como una fórmula o expresión α no es más que una sucesión gráfica de elementos de V, estará compuesta —en el orden de escritura— por una ordenación de dichos elementos de V y el número asociado a α vendrá dado, entonces, por $g\alpha = \prod p_n^{gs_n}$ donde pn es el n-simo número primo y gs_n es el numeral asociado al elemento n de la ordenación que compone la expresión α.

Por último, una demostración no es más que una sucesión $<\alpha_n>$ de expresiones, por lo que el número asociado a la misma será $g(<\alpha_n>) = \prod p_n^{g\alpha_n}$ (Debo señalar que las extensiones de g las denoto y denotaré por el mismo símbolo, dado que no se provoca, con ello, confusión alguna y menos aún en un contexto meramente descriptivo como éste, que no pretende ser ningún tratado sistemático de Lógica matemática).

La habilidad de Gödel estriba en realizar, constructivamente, una idea que se remonta a Aristóteles. Habilidad por la que la correspondencia g es biyectiva.

Consecuencia fundamental: A las proposiciones que pueden formalizarse en un sistema como P se las puede asignar un número; a las fórmulas abiertas, un conjunto de números naturales. De esta manera se traslada el sistema formal a la Aritmética y los conjuntos de proposiciones se convierten en conjuntos de naturales. Lo que pueda predicarse de estos conjuntos se trasladará a los primeros y recíprocamente.

De esta forma resulta que, frente a las aspiraciones del logicismo, la Lógica no es base para la Aritmética, sino que ambas se hacen equivalentes. Incluso la Aritmética se convierte en base para la Lógica. Gödel ha realizado el sueño de Gauss quien afirmaba que si la Matemática era la reina de las ciencias, la Aritmética era la reina de las Matemáticas, por lo que Gauss transformó la frase platónica del «demiurgo geometriza» en «el demiurgo aritmetiza». Afirmación que cobraría aún mayor fuerza si se tiene presente el resultado finalmente obtenido por Matiyasevic en 1970 —tras esfuerzos como los de Putnam, J. Robinson, Davis...— que establece que una relación es recursivamente numerable si y sólo si es diofántica.

Con el proceso aritmetizador Gödel ha constituido lo que vendrá en calificarse, posteriormente, teoría de la recursividad o computabilidad. Nueva disciplina que tomará nacimiento más oficial cuando en 1934 Gödel desarrolle en USA sus ideas. En 1934 no se detendrá únicamente en las funciones primitivo-recursivas, sino que establecerá la definición, hoy canónica, de las funciones recursivas en general. Definición que le fue sugerida en carta por Herbrand en 1931 y que, por este motivo, se denomina de Herbrand-Gödel.

Quiero destacar el hecho de que el texto de las clases de este curso de 1934 se publicará mimeografiado gracias a los apuntes de dos asistentes, S. C. Kleene y Rosser. Y que estas conferencias van a suponer la cristalización definitiva de la escuela americana de lógica matemática, abocada toda ella, en principio, a la teoría de la recursividad. Así, y en el mismo año de 1936, Rosser modificará la demostración de incompletitud gödeliana, Kleene ligará su nombre a las funciones generales recursivas, Church demostrará la indecidibilidad de la Aritmética y establecerá la hipótesis que hoy lleva su nombre... Lógicos matemáticos a los que se une el inglés Turing, quien en 1936, igualmente, liga las funciones recursivas con las funciones computables, caracterizando estas últimas mediante su algoritmo de máquinas de Turing y caracterizando los sistemas formales mediante la computabilidad —idea dada también y el mismo año de 1936, por Post—. Teoría de computabilidad o recursividad que puede estimarse, hoy día, como una rama más de la Matemática —la que formaliza la noción intuitiva de algoritmo o proceso mecánico finito—, independizada de la Lógica matemática aunque con aplicaciones fundamentales a la Lógica, especialmente en los terrenos de la decisión de teorías, terrenos en los cuales los criterios elaborados por Tarski han sido decisivos.

Utilizando el lenguaje de esta teoría de la computabilidad, apoyado siempre en la codificación numérica, en la gödelización, se dice que un conjunto A de números naturales o, por abuso de lenguaje, de las proposiciones correspondientes de un sistema formal, es *recursivo* si para cualquier elemento del conjunto A se sabe si el elemento pertenece o no pertenece a A; en otros términos, si A posee una función característica recursiva, es decir, una función f tal que

$$fx = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Un conjunto se dirá *recursivamente numerable* si A = ∅ o se pueden generar todos los elementos de A; en otras palabras, si existe una función f tal que dom(f)=A. Todo conjunto recursivo es recursivamente numerable, pero la conversa no se verifica.

El problema de decidibilidad quedaría expresado admitiendo

Un conjunto es decidible si y sólo si es recursivo.

Enunciado que constituye la *tesis de Church,* tesis bastante plausible pero que, por supuesto, no es una proposición matemática.

Con estas nociones es inmediato comprobar que el conjunto D de todas las proposiciones derivables es un conjunto recursivamente numerable —abuso de lenguaje porque quien es recursivamente numerable es el conjunto gD—, dado que dichas proposiciones quedan engendradas a partir del conjunto de axiomas —que es recursivo— mediante las reglas de derivación, que mantienen ese carácter.

Que las reglas de derivación, que son funciones que aplican expresiones en expresiones, son recursivas puede comprobarse de modo inmediato. Así, la del modus ponens puede adoptar la forma

$$f(\alpha, y) = \begin{cases} \beta \text{ si y tiene la forma de } \alpha \rightarrow \beta \\ \alpha \text{ de cualquier otra manera} \end{cases}$$

Con ello, lo que se habría demostrado es la proposición

Toda teoría axiomatizada es recursivamente numerable.

Por otro lado, como por construcción toda proposición derivable es válida, resulta que si se llama Th al conjunto de todos los teoremas se tendrá que D $\subset$ Th. De aquí que pueda plantearse el problema de completitud en términos de recursividad: Si se demuestra que el conjunto gTh de todos los teoremas o proposiciones válidos es recursivamente numerable, entonces D y Th coincidirán y el sistema será completo. Pero si Th no es recursivo —ni, por tanto, recursivamente numerable—, entonces el sistema formal será incompleto.

Puede demostrarse la proposición

Toda teoría recursivamente numerable y completa es decidible.

Demostración inmediata que, en esquema, llevaría los pasos siguientes: Por ser completo se tiene que para toda fórmula α de la teoría T se ha de verificar o bien $\alpha \in$ T o bien $\alpha \notin$ T. Por recursivamente numerable, existe un algoritmo que, aplicado a α, nos indicará si pertenece a T porque, si pertenece, se detendrá; de lo contrario, se aplica a $\neg\alpha$. De aquí que la teoría es recursiva y, por la tesis de Church, decidible.

Esta propiedad permite un nuevo criterio para averiguar la incompletitud de teorías: si se muestra que una teoría es indecidible, aunque sea recursivamente numerable, la misma no puede ser completa. Y es la idea más cercana al proceso demostrativo de Gödel.

Uno de los resultados básicos en las aplicaciones de la computabilidad a la Lógica matemática se centra en el recíproco del teorema antes enunciado de que toda teoría axiomatizable es recursivamente numerable. Es el teorema demostrado por Craig en 1953:

Toda teoría recursivamente numerable posee un conjunto recursivo de axiomas.

Ello implica, para los terrenos de la axiomatización, una consecuencia inmediata: Las teorías axiomatizables son las recursivo-numerables; como existen conjuntos que no son recursivamente numerables, existirán teorías que no podrán ser axiomatizables. Las palabras anteriores han exigido, por supuesto, precisar las nociones de axiomatizabilidad, admitir que una teoría T es axiomatizable en un lenguaje determinado si existe un conjunto A de proposiciones de T tal que gA sea recursivo y A axiomatice a T...

2.2. *Representabilidad sintáctica*

Por interesante que sea la teoría de la computabilidad originada por los trabajos de Gödel —no sólo de 1931, sino de 1934 y la consiguiente cristalización de la escuela americana—, conviene volver al proceso inicial, a la existencia de proposiciones indecidibles en un sistema que formalice la Aritmética.

Sea $N = < \omega, 0, s, +, . >$ la Aritmética natural, elemental. Se formaliza en un lenguaje de primer orden con la teoría simple de tipos, adoptando los axiomas del Cálculo de predicados y los axiomas de Peano. La formalización da paso al sistema formal P, cuyo desarrollo constituye la teoría formal aritmética. Junto a esta teoría se tiene la metateoría de P en la cual se establecen aserciones como «α es una fórmula de P», «α es consecuencia inmediata de β», «α es un axioma», «la sucesión $<\alpha>$ es una derivación de α»... Aserciones que, naturalmente, no pertenecen a P, sino a su metamatemática. Ahora bien, estas aserciones pueden formularse como funciones recursivas primitivas, pueden convertirse en un tipo especial de funciones aritméticas. Fue lo intentado por Skolem apoyándose en una formalización recursiva a base de las definiciones inductivas. Pero lo que plantea Gödel es que, al ser fórmulas de la metamatemática, por la aritmetización, son aserciones acerca de conjuntos aritméticos, por lo que se convierten en fórmulas aritméticas de un tipo especial; por ser fórmulas aritméticas de tipo especial, las mismas tendrán que ser formalizables, representables en P, siempre que en P no sólo existan variables sino nombres para esas variables. Si tales fórmulas aritméticas son representables en P, entonces, y es consecuencia inmediata, la metamatemática de P quedará incluida en P y el sistema formal P podrá hablar de sí mismo. La originalidad de Gödel se centra, entonces, en resolver dos problemas: En primer lugar, mostrar que los predicados metamatemáticos pueden expresarse en términos de funciones y relaciones primitivo-recursivas; en segundo lugar, que tales funciones y relaciones son representables, son definibles sintácticamente en P.

En cuanto al primer punto lo desarrolla Gödel en 46 lemas en los cuales demuestra la recursividad primitiva de nociones como «x es divisible por y» —lema 1—, «x es número primo» —lema 2—, hasta «x es una derivación de la fórmula y» —lema 45— y «x es una fórmula demostrable» —lema 46—, advirtiendo que esta última no es recursiva. El proceso demostrativo se apoya en la previa demostración de que las funciones primitivo-recursivas son cerradas respecto a los conectivos lógicos, sustitución, inversión, etc., así como, por supuesto, en la aritmetización de la sintaxis.

En cuanto al segundo problema debe observarse que las funciones primitivo-recursivas son funciones definidas por recursión, por inducción. Y lo que expresa la posible representación o definición sintáctica es que tal definición inductiva, con sus dos fases y expresando la reiteración creadora de cada elemento, puede tener su contrapartida formal en una definición explícita. Reducir la recurrencia a expresión explícita formal era uno de los objetivos de Dedekind, de Frege, de todo el logicismo. Con ello se pretendía suprimir el carácter «creador» del proceso matemático por excelencia, la inducción. Este será el objetivo de Gödel en el punto que considero fundamental en el proceso demostrativo de la existencia de proposiciones indecidibles. Es lo que va a expresar su *Teorema V*, que las funciones primitivo-recursivas son representables en el sistema formal P, y ello sin referencia a interpretación alguna de las fórmulas, es decir, representabilidad estrictamente sintáctica. Lo cual exige, por supuesto, la previa definición formal de qué sea dicha representabilidad o definición sintáctica.

La idea de definición o representación sintáctica de una función o una relación aritmética en una teoría T construida sobre un lenguaje formal de primer orden, efectivo, que contenga, además de las constantes lógicas, las constantes no lógicas que puedan simbolizar los elementos aritméticos como 0, la operación unitaria sucesor y las operaciones binarias suma y producto, puede formalizarse mediante las definiciones:

Definición 1. Una relación R, n-aria, es *representable débilmente* en T por la fórmula α si y sólo si α es de aridad n y para toda n-tupla de naturales se verifica

$$<x_1, x_2, \ldots, x_n> \in R \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\,(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) \in T$$

2. En las mismas condiciones, R es *representable* en T ssi

$$1. \quad <x_1, \ldots, x_n> \in R \quad \Rightarrow \quad \alpha\,(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \in T$$

$$2. \quad <x_1, \ldots, x_n> \notin R \quad \Rightarrow \quad \neg\alpha\,(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \in T$$

3. Una función n-aria es *representable* en T por una fórmula α ssi α es de aridad n+1 y se verifican

$$1. \quad \alpha\,(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}) \in T$$

$$2. \quad \forall v\, \alpha\,(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, v) \rightarrow \mathbf{y} = v \in T$$

donde y es el valor que toma la función en la n-tupla $<x_1, \ldots, x_n>$, es decir, $y = f(x_1, \ldots, x_n)$.

La condición 1. en 3. expresa la definición, mientras que la 2. indica la unicidad de la misma. La notación creo que es clara en cuanto a que $\mathbf{x}$ denota el numeral asociado al natural x. Y, naturalmente, decir que una fórmula α pertenece a la teoría T equivale a decir que es consecuencia de la misma, es decir, $T \vdash \alpha$.

Con estas definiciones el teorema V de la memoria de Gödel puede establecerse en los términos:

Una función es recursiva si y sólo si es representable en P; es recursivamente numerable ssi es representable débilmente en P.

La demostración es larga y tediosa, pero no difícil —una vez que se dio por vez primera—. Intuitivamente, para el enunciado en el que se hace uso del término «función» —aunque el teorema es válido igualmente para el término «relación»—, tal demostración seguiría una línea como la dada en el esbozo siguiente:

a) Si f es representable en P entonces es recursiva. Supongamos que f es unitaria y que la fórmula α la representa en P, que posee A como conjunto de axiomas. La computabilidad de f puede realizarse en la forma siguiente: Se generan los A-teoremas; por ser f representable, tienen que existir fórmulas de la forma $\alpha\,(\mathbf{x}, \mathbf{y})$; entonces, cada vez que se obtenga tal fórmula, $fx=y$. La unicidad de f vendrá asegurada por la segunda condición establecida en la definición de representabilidad.

b) Toda función primitivo-recursiva es representable en P. Es la parte más larga, más tediosa. La idea más simple es la de J. Robinson, contenida prácticamente en los teoremas I a IV de la memoria de Gödel. Se forma el conjunto X de todas las funciones representables en P y se comprueba que las funciones aritméticas, suma, producto, sucesor, etc., pertenecen a X.

La demostración, el teorema, no son válidos por modo exclusivo para P, sino para toda teoría T que satisfaga las condiciones impuestas en la Definición 1 y que sea, además, axiomatizable, es decir, recursivamente numerable.

a) *Teorema del punto fijo*

A partir de aquí se encuentra un resultado en principio insospechado. El hecho de que en todo sistema formal como P, la representabilidad sintáctica implica la existencia de una propiedad muy general de los sistemas matemáticos: la propiedad del punto fijo —particularización, aquí, del teorema de recursión puesto de relieve por Kleene—. Hablando sin gran precisión, la misma indica que en estos sistemas existe una proposición que hace referencia a ella misma. Autorreferente de alguna manera, porque, en términos de computabilidad, lo que hace es nombrar las instrucciones adecuadas para su propia codificación, para su propia aritmetización.

El punto fijo es la propiedad central de la cual se obtendrán, según cuál sea la fórmula elegida, el teorema de incompletitud o primer teorema de Gödel; la imposibilidad de demostración de esa misma consistencia que se supone verificar el sistema o segundo teorema de Gödel, la indefinibilidad en el interior del sistema o teorema de Tarski; en otras palabras, los grandes teoremas calificados de limitación de los sistemas formales.

Teorema del punto fijo, diagonalización o autorreferencia: *Sea T una teoría sobre un lenguaje de primer orden efectivo L en la que toda función primitivo-recursiva de una variable sea representable y sea* α *una fórmula de L de aridad 1. Existe en L una proposición* β *tal que* $T \models \alpha\,(\mathbf{g}\,\beta) \leftrightarrow \beta$.

Demostración: Supongamos en L una fórmula β de una variable. Por la gödelización, le corresponderá un natural $g\,\beta$, de numeral $\mathbf{g}\,\beta$. Si se reemplaza este numeral por la variable de β se tendrá en T la proposición $\beta\,(\mathbf{g}\,\beta)$. A la cual le corresponderá, nuevamente, por g, otro número, $g\,(\beta\,(\mathbf{g}\,\beta))$. Se construye, ahora, una función f de una variable x en la forma

$$fx = \begin{cases} g\,(\beta\,(\mathbf{g}\,\beta)) & \text{si } x = g\,\beta \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

Dada la construcción, la función f es claramente recursiva y de una variable. De aquí que, por la hipótesis, es representable en T. Es decir, que en T existe una fórmula $\varphi(v_1, v_2)$ que representa la función f. Lo cual quiere decir que se verifica T $\models \varphi(\mathbf{g}\beta, \mathbf{g}(\beta(\mathbf{g}\beta)))$.

Debe observarse que la construcción de f requiere un proceso equiparable al de la diagonalización cantoriana. Una vez construida y tomada la fórmula que la representa en T, pasamos a construir la proposición, que designo también por β, del enunciado del teorema, con α como fórmula de una variable libre.

Sea la fórmula θ de T de una variable libre $\exists v_1(\alpha(v_1) \wedge \varphi(v_1, v_2))$. Por gödelización, a θ le corresponde un número $g\theta$ de numeral $\mathbf{g}\theta$. Sea β la proposición obtenida reemplazando en θ la variable v_2 por $\mathbf{g}\theta$, es decir, $\beta = \theta(\mathbf{g}\theta)$. Al igual que antes, se tendrá el número $g(\theta(\mathbf{g}\theta)) = g\beta$ y su numeral $\mathbf{g}\beta$.

Aplicando ahora la función f, se tiene, $f(g\theta) = g(\theta(\mathbf{g}\theta)) = g\beta$.

De aquí que, por la elección de la fórmula que representa a f en T debe verificarse T $\models \varphi(\mathbf{g}\theta, \mathbf{g}\beta)$. Como T es una teoría construida sobre un lenguaje de primer orden, ha de verificarse T $\models \alpha(\mathbf{g}\beta) \rightarrow \theta(\mathbf{g}\beta)$, es decir, T $\models \alpha(\mathbf{g}\beta) \rightarrow \beta$.

Recíprocamente, como f es representable en T se tiene T $\models \varphi(\mathbf{g}\theta, v_2) \rightarrow v_2 = \mathbf{f}(\mathbf{g}\theta) = \mathbf{g}\beta$. Por consiguiente, T $\models \alpha(v_1) \wedge \varphi(\mathbf{g}\beta, v_1) \rightarrow \alpha(\mathbf{g}\beta)$. En otras palabras, T $\models \beta \rightarrow \alpha(\mathbf{g}\beta)$.

La aparición de esta propiedad del punto fijo y su aplicación al sistema formal P, se apoya en las condiciones siguientes:

a) P es, por su construcción, axiomatizable por un conjunto recursivo de axiomas;

b) por estar escrito en un lenguaje de primer orden que posee los símbolos correspondientes a la constante cero, a la función sucesor y a las operaciones suma y producto, P posee la propiedad de definición sintáctica de las funciones primitivo-recursivas.

Son las dos condiciones para que en P aparezca la propiedad del punto fijo. Explícitamente señala Gödel que son las únicas condiciones que se exigen al sistema P y son tales que cualquier otro sistema matemático debe cumplir. Condiciones que suelen abreviarse indicando «cualquier sistema formal suficientemente potente».

Ahora bien, se ha construido P de tal manera que formalice la Aritmética natural $N = \langle \omega, 0, s, +, . \rangle$; en otras palabras, se ha construido P para que satisfaga la condición

c) todas las proposiciones de P son verdaderas en N.

Si agregamos a tales condiciones la de consistencia de P —que por constituir N un modelo, es suposición razonable—, resulta que, por aplicación del punto fijo pueden construirse proposiciones tales que ni ellas ni sus negaciones son demostrables en P, aunque en la interpretación que de las mismas se haga en N, por la condición c), sean verdaderas.

En este punto debe precisarse el término consistencia de un sistema formal. Gödel hace ver que, junto a la consistencia simple se encuentra otro tipo de consistencia, la ω-consistencia. La simple indica que en P no puede demostrarse, simultáneamente, una proposición α y su negación $\neg\alpha$. La ω-consistencia indica que para toda fórmula con una variable que sea demostrable en la teoría no existe variable alguna que, reemplazada en la misma, haga que la fórmula obtenida deje de ser demostrable, es decir, la ω-consistencia expresa $\exists v \neg\alpha (v) \notin T$. La relación entre ambos tipos de consistencia se centra en que si una teoría es ω-consistente entonces la misma es simplemente consistente, pero si es simplemente consistente puede no ser ω-consistente. Relación y tipos de consistencia creados por Tarski, aunque sin este nombre, un par de años antes de que los utilizara Gödel —lo cual no indica que Gödel conociera el trabajo del matemático polaco—.

b) *Teorema de incompletitud*

Para la construcción de una proposición indecidible Gödel crea una relación —hoy llamada «función de sustitución de Gödel»— definida en los términos

$\sigma(x, y) = \{ (x, y) \mid$ x es el número de Gödel de una A-demostración de una fórmula cuyo número de Gödel es y $\}$

Relación σ que es recursivo-primitiva, como puede demostrarse fácilmente teniendo en cuenta que si X es un conjunto de fórmulas tal que gX es recursivo, entonces g(dem.X) es recursivo, porque basta aplicar g a la definición de derivación o demostración formal.

Por ser σ (x, y) relación recursiva, es representable en P por una fórmula de dos variables libres α (v_1, v_2). Se toma en P la fórmula de una variable libre $\neg\exists v_1 \alpha(v_1, v_2)$. Y se está en condiciones de aplicar el teorema del punto fijo por el cual existe una proposición β tal que P $\models \alpha (g\beta) \leftrightarrow \beta$.

Pero esta fórmula β es tal que ni ella ni su negación son demostrables en P, es decir, es una fórmula indecidible. En efecto:

a) Supongamos que P es consistente y $P \vdash \beta$. Por ser demostrable, existe una A-demostración θ de β. De aquí que $(g\theta, g\beta) \in \sigma$ y, por la representabilidad de σ, $P \vdash \alpha(g\theta, g\beta)$. Luego se cumple $P \vdash \exists v_1 \alpha (v_1, g\beta)$, de donde $P \vdash \neg\alpha (g\beta)$. Contradicción con la hipótesis $P \vdash \beta$ y el teorema del punto fijo $P \vdash \alpha (g\beta) \leftrightarrow \beta$.

b) Supongamos ahora que P es ω-consistente. Por serlo, es consistente, y por a), β no es demostrable, es decir, no existe una A-demostración θ de β en P, por lo cual no existe natural $g\theta$ asociado y se tendrá $(g\theta, y) \notin \sigma$, de donde, para todo y, se tiene $P \vdash \neg\alpha (g\theta, y)$. La condición de ω-consistencia es que $\exists v_1 \neg (\neg\alpha (g\theta, v_1)) = \exists v_1 \alpha (g\theta, v_1)$ no es demostrable en P. Como β no es demostrable cabe suponer que es demostrable $\neg\beta$, es decir, $P \vdash \neg\beta$. Pero entonces se tendría $P \vdash \neg\alpha (g\beta)$, es decir, $P \vdash \exists v_1 \alpha (g\beta, v_1)$, contradicción.

En resumen, si P es ω-consistente, ni β ni $\neg\beta$ son demostrables en P. De aquí que, al existir una proposición indecidible, P es incompleto.

A su vez debe observarse que lo que se ha demostrado es la validez de la metaproposición

$$(*) \qquad \mathrm{Cons}(P) \rightarrow \beta$$

Hasta aquí, se ha logrado la demostración de una proposición indecidible y, consecuentemente, la incompletitud de P. Demostración en la cual no se ha hecho llamada alguna a la posible interpretación de dicha fórmula. Si ahora agregamos la condición c) de que todas las proposiciones de P son o verdaderas o falsas —en un sentido más o menos intuitivo del término— en N, resulta que β se sigue en N si y sólo si $\alpha (g\beta)$ se sigue también —que es lo que indica el teorema del punto fijo—, es decir, si y sólo si $\alpha (g\beta)$ no es demostrable. En otras palabras, β se sigue en N si y sólo si no es demostrable en P. Pero β puede interpretarse como aquella proposición que dice no existir natural alguno que sea el número de Gödel de una fórmula determinada y, por la función de sustitución σ, tal fórmula es la propia β. En otras palabras, β expresa su propia indemostrabilidad.

(En la demostración aquí dada se soslaya, realmente, todo el material de la teoría de números que debe utilizarse en las versiones más ligadas a la original de Gödel —propiedades de factorización única, teorema del resto chino, congruencias...—. Ello permite remarcar, con mayor nitidez, si cabe, una de las claves del trabajo gödeliano, clave origen de la teoría de la computabilidad).

c) *Indemostrabilidad de la consistencia*

El segundo teorema de Gödel expresa que si P —o cualquier otro sistema formal que satisfaga las dos condiciones a) y b) antes enunciadas— es consistente, entonces no puede demostrarse su propia consistencia en el interior de P. Es decir, existe en P una proposición que expresa la condición de consistencia del sistema pero que es indemostrable en el mismo. Gödel no demuestra tal afirmación en detalle. Le basta indicar que es una consecuencia del teorema anterior, lo que no es enteramente exacto. Sí que es consecuencia del teorema del punto fijo. La proposición indemostrable es inmediata de construir, la equivalencia

$$\mathrm{Cons}(P) \leftrightarrow \beta$$

cuya primera parte he señalado antes, (*). La segunda, $\beta \rightarrow \mathrm{Cons}(P)$, no hace otra cosa que expresar el principio de Duns Scoto de que si una proposición es indemostrable, entonces P es consistente. Como la equivalencia dada es una expresión de la metateoría de P, es representable en P y se está en condiciones de aplicar el teorema del punto fijo y repetir el razonamiento realizado en el Teorema de incompletitud.

De esta forma, la demostración de consistencia de P y de todos aquellos sistemas formales suficientemente potentes, tendrá que ser realizada por medios no sintácticos o, de hacerlo por medios sintácticos, los mismos no pueden ser interiorizados en el interior del sistema formal. Una demostración no sintáctica de la ω-consistencia fue dada por Mostowski, utilizando recursos semánticos de la teoría de modelos. El esbozo de una demostración de ω-consistencia semántica se centra en el hecho de que, por la construcción de P, la Aritmética natural N es un modelo de P. De aquí que si $\alpha(x) \in P$ para cada natural x, entonces la clausura de $\alpha(x)$ se sigue en N. Como ello es válido para cualquier x de ω, se tiene $N \models \forall x\, \alpha(x)$ y, por consiguiente, $\exists v \neg\alpha(v) \notin P$. Demostración semántica, imposible de integrar en P, o en cualquier otro sistema matemático que contenga las expresiones de la Aritmética; así, la teoría de conjuntos.

Advertencia y complementos

El propio Gödel, en su memoria original, agrega varias advertencias. La primera, que su demostración es constructiva, en el sentido de no limitarse a dar una demostración global —como la antes esbozada de carácter semántico—, sino que construye, de modo efectivo, la fórmula indecidible. Constructivismo que se acentúa al indicar que el conjunto de variación es numerable y, por consiguiente, no requiere de ningún otro tipo de cardinales transfinitos. Advertencia que indica que en dicha demostración ha seguido los requerimientos finitistas del programa hilbertiano.

En segundo lugar, señala que si se agrega como hipótesis la de consistencia simple, únicamente, resulta que P será ω-incompleto, es decir, que en P se tendrá un predicado cuya universalización no es demostrable, pero para el cual no puede darse contraejemplo alguno. En otras palabras, la consistencia simple no implica la ω-consistencia.

Por otro lado, podría pensarse que si se agrega al conjunto A de axiomas de P la proposición indecidible construida —que es independiente de A—, el sistema axiomático resultante sería completo. Pero ello es erróneo, porque debe observarse que el conjunto A de axiomas se ha supuesto recursivo y el agregarle una proposición a un conjunto recursivo no varía el carácter de recursividad del mismo. Cualquier ampliación recursiva que se realice de un sistema como P es tal que seguirá cumpliendo el teorema del punto fijo y, por consiguiente, será incompletable, porque seguirán existiendo en dicha ampliación proposiciones indecidibles. De aquí resulta que los sistemas como P son, en terminología tarskiana, esencialmente indecidibles.

d) *Teorema de indefinibilidad de Tarski*

Cabe obtener mayor información aún de teorías como P sin más que seguir aplicando el teorema del punto fijo. Y una de ellas se centra en que tampoco en el interior de P puede establecerse una definición de proposición verdadera, es decir, un predicado que represente un criterio más o menos razonable de verdad de una proposición. Esta falta de información constituye el teorema de indefinibilidad de Tarski, que puede establecerse en términos más estrictamente semánticos, pero que aquí, por enlace con la teoría de la computabilidad, enuncio en los términos:

El conjunto de teoremas de P es indefinible en P.

Demostración. Sea N $= <\omega, 0, s, +, \cdot>$ y ThP$= \{ g\alpha \mid N \models \alpha \}$ Lo que se pretende demostrar es que ThP no es definible sintácticamente en P. Supongamos que es representable. Ello implica la existencia de una fórmula α en N y, por el teorema del punto fijo aplicado a $\neg\alpha$, se tendrá la proposición β tal que P $\models \neg\alpha (g\beta) \leftrightarrow \beta$, y por ser modelo N de P se tiene N $\models \neg\alpha (g\beta) \leftarrow \beta$. Ahora aparece una contradicción si queremos demostrar que N $\models \beta$, y otra contradicción si lo que se quiere demostrar es N $\models \neg\beta$. En efecto,

a) Si N $\models \beta$ entonces $g\beta \in$ ThP y, por la construcción realizada, N $\models \neg\alpha (g\beta)$, es decir, $g\beta \notin$ ThP;

b) Si N $\models \neg\beta$ entonces $g\beta \notin$ ThP y, por el mismo motivo anterior, N $\models \neg\alpha (g\beta)$, es decir, $g\beta \in$ ThP.

El teorema de Tarski no sólo indica que en P no puede establecerse predicado alguno acerca de una proposición. Teniendo presente el equivalente al Teorema V de que toda relación o función es recursiva si y sólo si es representable sintácticamente, resulta que el conjunto ThP, por no ser representable, no es recursivo. Incluso algo más, no pertenece a la jerarquía aritmética. Este resultado puede ligarse con el demostrado antes de que el conjunto de derivaciones formales de P, el conjunto DP es recursivamente numerable y era tal que DP $\subset$ ThP. Como este último ni siquiera es recursivo, la inclusión anterior es estricta. Y quedaría así demostrado el teorema de incompletitud de Gödel anunciado en términos recursivos y a través del teorema de indefinibilidad de Tarski.

Y aún puede obtenerse más información del hecho de que ThP no sea recursivo. Por la tesis de Church, ello equivale a decir que ThP es indecidible. Resultado que constituye el teorema demostrado por Church en 1936 —por supuesto que por otros medios—.

Además, y como hiciera Kleene, si estos resultados se ligan con los de completitud, se tendrían las relaciones siguientes: L_1 es completo; $L_1 \cup$ Aritm es incompleto. De aquí que P no puede ser categórico, es decir, tienen que existir modelos no canónicos de la Aritmética.

Finalmente debo señalar que la argumentación gödeliana puede aplicarse a la teoría de conjuntos axiomatizada; por ejemplo, a ZFS. Si se supone que la misma es consistente, entonces, mediante la función de sustitución puede establecerse la proposición que afirma que en ZFS existe una proposición que no es expresable aritméticamente. En otras palabras, no hay proposiciones de la teoría de conjuntos que sean equivalentes a proposiciones de la aritmética elemental.

2.3. *Otros puntos en la memoria 1931 y memoria 1936*

La cantidad de ideas nuevas que Gödel aporta en su ensayo de 1931, «Sobre proposiciones indecidibles formalmente de PM y sistemas relacionados con él», no se agota con lo aquí indicado. En el párrafo 3 de la misma, pasa Gödel a definir el concepto de *relación aritmética* —y, en paralelo, proposición aritmética— en términos como:

Una relación es aritmética si puede definirse en términos de + y . para números naturales y las constantes lógicas $\neg$, v, el cuantificador universal y la relación de igualdad aplicados tan sólo a números naturales.

Gödel demuestra que toda relación recursiva es aritmética. Como consecuencia, todo problema de la forma $\forall x F x$, siendo F recursivo, posee un equivalente aritmético —por ser representable—; y la proposición correspondiente debe ser demostrable en P. De aquí Gödel establece que en P y cualquier sistema formal que tenga su misma potencia, tienen que existir proposiciones aritméticas indecidibles.

Ahora bien, no sólo proposiciones aritméticas, también tienen que existir problemas indecidibles del cálculo restringido de predicados. Punto que enlaza con su demostración de completitud de tal cálculo, pero señalando que si bien en el cálculo funcional restringido puro existe una demostración de validez o un contraejemplo para las proposiciones del mismo, la existencia de este contraejemplo no siempre es demostrable cuando se actúa en un sistema ampliado como P o la teoría de conjuntos. En otras palabras, la adjunción de variables de tipos altos modifica el conjunto de fórmulas aritméticas demostrables. La indecidibilidad, de esta forma, se constituye en un concepto relativo al lenguaje en el cual el sistema formal se esté mapeando.

Con estos temas de Lógica matemática puede ligarse el contenido de la memoria de 1936 «Sobre la longitud de las demostraciones». En este breve ensayo Gödel establece lo que puede calificarse como «principio de cortadura inferior de las demostraciones». Debe observarse lo siguiente, que enlaza con lo señalado en el párrafo anterior: Dada una teoría, la misma puede ampliarse y hacerse más potente en cuanto se agreguen nuevos principios. De hecho, la consistencia de P no puede demostrarse en el interior de P; pero si se amplía dicho sistema cabe la posibilidad de dicha demostración. Es la interpretación que Gödel da respecto a las posibles limitaciones del programa de Hilbert. Por otro lado, todo matemático sabe que hay proposiciones —por ejemplo, de teoría de números— que satisfacen dos características: a) Su formulación como proposición es muy simple e inmediata, pero su demostración puede ser de una complejidad tan grande que ni siquiera pueda encontrarse la misma por medios elementales o no se ha encontrado demostración alguna; b) Las demostraciones son más complejas cuanto menor es el número de axiomas elegido; en teoría de números, incluso las demostraciones analíticas pueden ser más breves y elegantes que las intrínsecamente numéricas o elementales. Estos hechos implican un concepto como el de «complejidad de una demostración» que, en general, nunca se especifica, al igual que los de «brevedad» o «elegancia».

Uno de los problemas que, en el fondo, se discuten, se centra en la ampliación o extensión de una teoría —teoría elemental, teoría analítica de números—. Y es al que va a referirse, básicamente, el trabajo de Gödel, con la inmediata repercusión para el problema de la demostración de la consistencia de una teoría. La formulación más intuitiva puede esbozarse en la línea siguiente:

Sea T una teoría axiomatizada y T' una ampliación de la misma tal que T' contenga no sólo todas las proposiciones expresables en T, sino además nociones de aritmética que permitan hablar de los números asociados con las fórmulas de T y en tal medida que puedan aplicarse los teoremas de limitación. Ello exige que T' contenga, además de los axiomas de T, los correspondientes a las cláusulas de cierre que caractericen la noción de sucesión finita en T. En estas condiciones el teorema demostrado por Gödel enuncia:

Existen infinitas fórmulas de T que son demostrables en T —y por tanto en T'— pero tales que su demostración más breve en T será k veces más larga que su demostración en T'.

Y el natural k puede ser, además, prefijado de antemano. Consecuentemente, dada una teoría T caracterizada por un conjunto de axiomas A, si se agrega a A como nuevo axioma una fórmula independiente α, pueden encontrarse fórmulas deducibles de A tales que su deducción de $A \cup \{\alpha\}$ es arbitrariamente menos compleja que la deducción de A.

Naturalmente como cuestión se tiene la de precisar «complejidad de una demostración» de α a partir de A. Ello puede hacerse como una aplicación definida para los pares (A, α) con $\alpha \in D(A)$ —es decir, $A \vdash \alpha$ —, y que toma valores en N. Aplicación caracterizada, por ejemplo, por el mínimo número de signos del alfabeto del lenguaje formal L en el que se formule T, número mínimo necesario para la derivación de la fórmula. Igualmente, puede utilizarse el número de cuantificadores que prefijen una demostración en T.

Y en esta línea, ligándola con la teoría de modelos, puede obtenerse una demostración de la consistencia de T en T', adoptando como complejidad el número de cuantificadores gobernado por un cuantificador dado. Al hacerlo de esta manera el resultado de Gödel puede obtenerse como consecuencia del proceso anterior. Que es el camino seguido por Kreisel-Wang en 1955-1958. (Wang 1970; Mostowski 1966).

3. *Gödel y la Lógica intuicionista*

Todos los intentos superadores de la crisis de los Fundamentos de la Matemática, salvo el intuicionismo radical, presentan en común la aceptación de la Lógica clásica —como veritativo-funcional bivalente— como base central y apoyatura para sus ideas e intentos reduccionistas o justificacionistas. Y es a la Lógica clásica a la que, por modo exclusivo, hacen referencia los apartados anteriores. Sin embargo, junto a tal lógica clásica existía la modal —ya apuntada por el propio Aristóteles y desarrollada por Lewis— y, fundamentalmente en el campo que aquí interesa, la intuicionista. Brouwer rechazaba el empleo indiscriminado de la Lógica clásica, admitiendo su validez y adecuación para las clases finitas, pero no su extrapolación para las clases infinitas; extrapolación origen, precisamente, de la aparición de las antinomias. Uno de los recursos prohibidos era, por ejemplo, la ley del tercero excluido. Los intuicionistas crearon un ambiente en el que la limitación de recursos utilizados —que debían ser finitos— y en los que todo matemático se encontraba de acuerdo, permitía asegurar que lo demostrado en el interior de la matemática intuicionista podía estimarse como radicalmente asegurado. Uno de los problemas se centraba en dotar de esta seguridad a todas las adquisiciones matemáticas, aun sin sacrificar los medios, los métodos que en la misma se empleaban. En todo caso, el núcleo común a matemática ordinaria y matemática intuicionista se estimaba el núcleo central, la parte segura contenida en la matemática ordinaria, aparentemente mucho más amplia.

Por otro lado, la negativa de los primeros intuicionistas al empleo de procesos como los axiomáticos y formalizadores, hacía que las posibles comparaciones fueran difíciles. En el terreno de la Lógica ocurría lo mismo. Sin embargo, en 1925 Kolmogorov establece la primera formalización, la primera axiomatización de la teoría intuicionista. Axiomatización que cubre lo que hoy cabría calificar de lógica minimal positiva. El objetivo de Kolmogorov es traducir la matemática clásica a la matemática intuicionista, establecido previamente el núcleo lógico común mínimo. El trabajo del matemático ruso no es muy conocido. De aquí que se mantuviera la idea señalada sobre las relaciones entre la lógica clásica y la intuicionista, la imagen de que la lógica intuicionista es una parte de la clásica, un fragmento de la misma frente a la concepción de Kolmogorov.

Tras el intento de Kolmogorov es Heyting quien, en 1930, da una axiomatización de la Lógica proposicional intuicionista. En el fondo es equivalente a la del matemático ruso, más un último axioma, el 11 en Heyting, cuya aceptación es más bien problemática: $p \rightarrow (-p \rightarrow q)$, por lo cual no todos los intuicionistas aceptan la axiomatización de Heyting como adecuadamente representativa de la posición intuicionista. Sin embargo, dicha formulación se ha convertido hoy día en canónica y su difusión ha permitido, sin duda, el establecimiento de unas relaciones más claras entre la Lógica intuicionista respecto a la clásica, al menos. La idea de Heyting consistía en construir una formalización con proposiciones únicamente implicativas traducidas a reglas de inferencia y tales que sólo justificaran las formas demostrativas que Brouwer estimaba como válidas en el razonamiento matemático. Su convicción, sin embargo, era opuesta a la de Kolmogorov: el Cálculo proposicional construido, CH, constituía una parte del Cálculo proposicional clásico CP, la parte segura del mismo y en la cual un principio como el de tercio excluso no se manejaba, aquella en la cual una ausencia de contradicción no equivalía a la presencia de la «verdad».

Tras sus trabajos dedicados al logicismo y al formalismo, Gödel dedica su atención durante 1932 y 1933 a la Lógica intuicionista. Puede pensarse que en búsqueda de la prueba de consistencia finitista que no pudo encontrar en el interior de los sistemas formales, pero posible de hallar —y ya he mencionado su posición respecto a este problema— por otros medios. Gödel, como Kolmogorov, invierte la imagen de Heyting: es la Lógica clásica la que puede estimarse como una parte de la Lógica intuicionista. Para ello, trabaja en dos fases: La primera se centra en demostrar que el CP clásico puede formularse de modo completo con sólo dos conectivos: negación y conjunción. Los demás conectivos aparecerán como signos abreviadores de fórmulas; no son, por consiguiente, signos primitivos la disjunción, la implicación, la equivalencia... La segunda fase se centra en demostrar que toda fórmula del CP así construido es demostrable en CH si es demostrable en CP.

Tras estas dos fases con las que demuestra que el Cálculo clásico puede estimarse como una parte del intuicionista, Gödel sugiere la posibilidad de que la teoría clásica de números, si se interpreta adecuadamente, puede estimarse incluida en la teoría intuicionista de números. Sugerencia ya hecha también por Kolmogorov y por Glivenko en 1929. Con una consecuencia para el problema formalista de consistencia, constituir una prueba de carácter indirecto. Porque, claramente, si el cálculo y la lógica intuicionista se estiman consistentes —y ningún intuicionista dejaría de hacer tal estimación, aunque mantuviera que el problema de consistencia es problema ficticio—, al integrar en él la matemática clásica, ésta también es consistente. Es lo sugerido por Gödel: si la teoría de números intuicionista carece de contradicción, también carecerá de contradicción la teoría de números clásica.

Además, Gödel observa dos rasgos en la Lógica intuicionista. Por un lado, el hecho de que no existe conjunto de matrices veritativas con número finito de elementos, para el cual el conjunto de axiomas de CH constituya una base completa. En otras palabras, CH no es veritativo funcional finito; es imposible construir tablas de verdad con número finito de valores que permitan verificar todas las tautologías de CH y sólo dichas tautologías. Este rasgo diferencia de modo sustancial el cálculo intuicionista tanto del clásico como de las lógicas polivalentes creadas por Lukasiewicz. Precisamente el cálculo intuicionista se interpretó en un principio como una lógica trivalente; lo cual se viene abajo por lo demostrado por Gödel. Lo único que puede asegurarse es que el cálculo lógico trivalente queda incluido, como CP, en el intuicionista.

El segundo rasgo se centra en el hecho de que las proposiciones intuicionistas pueden interpretarse en un sentido diferente al clásico. Es lo defendido por Heyting, por ejemplo, negándose a admitir que su formulación haga caer al intuicionismo bajo el programa hilbertiano de axiomatización. Sin embargo, Gödel sugiere que, efectivamente, las fórmulas intuicionistas no deben interpretarse como las fórmulas clásicas, sino como abreviaturas de fórmulas clásicas. Debo recordar, aquí, que para el constructivista, la traducción formal no representa el total de la expresión, dado que se abandona el carácter constructivo de la expresión; caracter constructivo que viene asegurado por la lectura «se construye» o «es demostrable». Y Gödel interpreta las fórmulas intuicionistas en este sentido: una fórmula α del cálculo intuicionista expresa «α es demostrable», Dα. Así, una formulación de Heyting como '$p \wedge q$' debe interpretarse como '$Dp \wedge Dq$' —«p es demostrable y q es demostrable»—. Con ello Gödel da dos notas más que diferencian el cálculo intuicionista del clásico y del trivalente: En primer lugar, ninguna fórmula de la forma 'α o β' es demostrable en dicho cálculo si al menos una de dichas fórmulas es demostrable en el mismo. Lo cual no ocurre en CP donde, por ejemplo, '$p \vee \neg p$' es una tautología aunque ni la variable proposicional 'p' ni '$\neg p$' tengan que ser tautologías. En segundo lugar, el cálculo intuicionista se puede convertir en un cálculo modal del tipo S4 de Lewis, sin más que cambiar el término «es demostrable» por «es necesario».

En este último punto, interviene otro factor: En la segunda fase por la que Gödel demuestra que CH incluye la totalidad de la lógica clásica, Gödel no usa la axiomatización de Heyting. Construye el CH a partir del CP agregando otros axiomas. Con ello iniciará una línea de axiomatización de lógicas modales que seguirá posteriormente Feys en 1937, por ejemplo, al construir el sistema modal T, sin más que variar la formulación de Gödel. Línea de axiomatización de lógicas modales y no clásicas, pero apoyadas en la clásica, que se inicia con el trabajo del matemático austríaco, precisamente.

(Como mero ejemplo, menciono el sistema T de Feys: Como operadores monádicos, $\neg$ y L; diádico, $\vee$; como Definición: $M\alpha = \neg L \neg\alpha$; como axiomas, los A.1 - A.4 de CP más el A.5: $Lp \rightarrow p$ (de necesidad), y A.6: $L(p \rightarrow q) \rightarrow (Lp \rightarrow Lq)$; como Reglas, además del modus ponens, la dada por $\vdash \alpha \Rightarrow \vdash L\alpha$).

Aunque Gödel no explota la equiparación de CH con la Lógica modal —explotada en cambio por Mc Kinsey y Tarski, ampliamente—, sí cabe reseñar que en su interpretación quedaría justificado el rechazo de Brouwer respecto al tercero excluido. En su traducción resulta que esta ley no es otra cosa que una versión del principio de reducción de la lógica modal, ya que diría $Dp \vee D\neg p$, expresión que equivale a la proposición $\neg Dp \rightarrow D(\neg Dp)$. De aquí que Gödel llegue a la conclusión, frente a las observaciones y afirmaciones del mismo Brouwer, de que el rechazo del tercio excluso se apoya, en el fondo, en la aceptación del predicativismo de Poincaré. En otros términos, si se acepta esta última exigencia, entonces debe rechazarse el uso indiscriminado del tercio excluso, al menos de la teoría de conjuntos infinitos y del análisis clásico.

Tanto el intuicionismo como la construcción y formalización de lógicas modales se han convertido en campos de trabajo muy fecundos. Ya he indicado la comparación entre las lógicas modales y el cálculo intuicionista o el método gödeliano de construcción axiomática. También la sugerencia de Gödel, en la misma línea de Kolmogorov, de traducir la matemática clásica en la intuicionista, ha tenido continuadores como van Dantzig y Glivenko, con manejo de cuantificadores acotados y en cuya línea se han realizado construcciones de sistemas lógicos como los minimales positivos, las lógicas sin negación... En otro aspecto, la reducción de CP a un cálculo formal con sólo dos conectivos puede llevar a la interpretación —en la línea de Lukasiewicz— de que son la negación y la conjunción los únicos conectivos definidos veritativamente de manera «natural», sin ambigüedad alguna; los restantes operadores proposicionales presentan algo de artificial, fundamentalmente la implicación, siempre discutida. En esta línea, la diferencia entre CH y CP podría centrarse en una distinta interpretación de un operador como el condicional, distinción que sería la que marcara las distintas reglas operatorias de inferencia en el interior de cada uno de estos cálculos.

4. *Consecuencias e interpretaciones*

Junto a los desarrollos puramente internos a la Lógica matemática y alguna de las consecuencias de los trabajos lógicos de Gödel he ido mencionando, al paso, interpretaciones a que dichos desarrollos incitan. Parece obligado agregar otras tanto respecto a las consecuencias de esta obra para el programa hilbertiano como para el problema de la fundamentación lógica de la matemática. Obligado, porque la obra de Gödel se inserta precisamente en este cuadro, aunque los resultados obtenidos, puedan llegar a desbordarlo. Ahora bien, mucha es la literatura, a veces no muy buena, que se ha realizado en torno a estos temas, especialmente en cuanto a los teoremas centrales de Gödel, los de incompletitud, enfocados como teoremas de limitación y, por consiguiente, como un dato negativo hacia las excesivas pretensiones de los logísticos. Dato negativo que, en contraposición, no ha destacado suficientemente la potencia de métodos y la cantidad de ideas nuevas que Gödel aportó a la Lógica matemática provocando, incluso, y en la línea de Skolem, la creación de una nueva disciplina matemática. Nueva disciplina que presenta su importancia en relación con los problemas de algoritmos. Para quien enfoque la Matemática con una visión estrictamente pragmática —que estimo ajena al hacer intrínseco matemático— la importancia aumenta por su entronque con la cibernética y las aplicaciones de ésta a la tecnología y, por rechazo, a la transformación del habitat y de la sociedad humana...

No deseo entrar, sin embargo, en este campo especulativo. Sí señalar que entre la mucha literatura provocada por los teoremas de limitación, pueden observarse dos líneas: 1) Críticas, en número relativamente escaso, por la necesaria tecnicidad que comporta, a la demostración original de Gödel; 2) Consecuencias y extrapolaciones «filosóficas», de todo tipo, que se realizan de dichas limitaciones.

a) En cuanto a este segundo tipo de literatura, en el terreno de interpretaciones, suelen adoptarse los teoremas de Gödel como representativos de las limitaciones internas de los formalismos.

Quiero destacar que la atribución que hace Gödel —y a la que he hecho referencia en 2.— al formalismo constituía una de las críticas centrales constructivistas a este tipo de justificación de la matemática y ello porque mantenían la idea de que la Matemática constituía un trabajo imaginativo irremplazable por máquina o cálculo alguno. De ahí la polémica de Poincaré con Russell, por ejemplo, y la negativa del matemático francés a que la Aritmética pudiera reducirse, pudiera ser formalizada de modo completo en sistema lógico alguno. Y ello porque para poder hablar de una demostración se necesita, ya, de la sucesión de los números naturales. Negativa reafirmada frente al finitismo sintáctico de Hilbert en el sentido de que para las pruebas de consistencia requeridas por dicha sintaxis, el lógico tenía que recurrir, forzosamente, a la inducción completa en cualquiera de sus versiones. Puntos en los cuales un Skolem mostrará su acuerdo con el matemático francés, por lo que realiza la formulación de la Aritmética apoyándose en la recursividad únicamente. El reduccionismo formalista es propio del logicismo —aunque se atribuyera, por confusión, al formalismo hilbertiano—. Por ello fueron los logicistas quienes se remitieron de manera constante a Leibniz, avanzado de su posición. Leibniz pretendió para la filosofía y para la ciencia dos objetivos: 1. La creación de una *characteristica universalis*, de un lenguaje universal simbólico y preciso en el que formalizar todas las proposiciones; 2. La creación de un *calculus ratiocinator*, de un método manipulador de las proposiciones para obtener todas las consecuencias posibles, método casi mecánico o algorítmico de decisión que llegara a impedir las discusiones. Objetivos que constituirían una parte esencial de la Lógica matemática asumida por los logicistas.

Si el primer punto fue casi obtenido por PM, los problemas de decisión, con su insustituible carácter de finitismo, se convertían en problemas muy ligados a este enfoque y sólo en el plano justificacionista de la consistencia, al formalismo. Y precisamente es la ilusión leibniziana la que cierra Gödel al demostrar que existen proposiciones indecidibles en PM si se le agregan los axiomas de la Aritmética. De aquí que el mismo Gödel señale explícitamente que sus resultados no contradicen el punto de vista hilbertiano, «porque este punto de vista presupone únicamente la existencia de una demostración de consistencia en la que únicamente se usen medios finitistas de demostración, y es concebible que existan demostraciones finitistas que *no puedan* ser expresadas en el formalismo de P». Gentzen, en 1936, demuestra la consistencia del sistema P, por medio de la inducción completa, pero aplicada a los ordinales transfinitos aunque sólo hasta el ordinal ε_0. Como nunca se había precisado nítidamente qué entender por medios finitistas de demostración, hay lógico-matemáticos para quienes la inducción transfinita reducida empleada por Gentzen pertenece al terreno de los medios utilizables por el metamatemático —así Mostowski o Monk, por ejemplo—, aunque dicha demostración es imposible de incorporar a la inducción completa simple y, con ella, al sistema formal P. Los argumentos finitistas intuicionistas respecto a la inducción transfinita reducida de Gentzen hacen muy plausible esta última interpretación. De aquí que el objetivo finitista lo pudiera mantener el propio Hilbert tras los trabajos de Gödel y sea factible mantenerlo hoy, es decir, puede seguir siendo problema hallar alguna demostración que, no siendo traducible al sistema formal P, posea un cierto carácter finitista. Desde luego serán los medios semánticos los que no puedan estimarse como sintácticos para las demostraciones de consistencia. Medios semánticos como el señalado tras el teorema de completitud.

En este sentido lo que indicarían los teoremas gödelianos es que no existe ningún sistema formal completo para la Aritmética que, siendo consistente, pueda ser descrito con rigor formal. Lo cual puede interpretarse como la imposibilidad de adquirir, con medios puramente matemáticos, la certeza de que la matemática no contenga contradicciones.

b) Suelen hacerse, en cuanto a los teoremas de limitación, dos extrapolaciones: 1. Lo que indica la incompletitud de la Aritmética formal es un límite de la razón; 2. Lo que indica es que ninguna máquina puede equipararse a la razón humana, porque toda máquina será impotente para demostrar una proposición como la de consistencia del sistema formal que dicha máquina construya. Son extrapolaciones contrapuestas. De la primera, el mismo Gödel indicaría que sus resultados «no imponen límite alguno al poder de la razón humana, sino más bien a las potencialidades del formalismo puro en matemáticas». De la segunda, tendrían que precisarse, en primer lugar, los propios conceptos de 'máquina' y 'pensar'; en segundo término, observar que el plano intuitivo es contradictorio —y no sólo el razonamiento, sino la conducta del bípedo implume que lo hace— y si surgió el intento formalizador fue, precisamente, como una de las líneas para superar la contradicción intuitiva, contradicción manifestada en la teoría intuitiva de conjuntos o en la lógica fregeana enfocadas como base del hacer matemático. De aquí que 'máquina' y 'cerebro' sean categorías en cierto modo paralelas, por la ausencia de un auténtico conocimiento de ambas en el momento presente de la ciencia y la tecnología.

Y es en este terreno puramente especulativo en el que se mueve un renacer de las viejas polémicas entre el mecanicismo y el espiritualismo. Ya el propio Gödel dio paso a este renacer al señalar que sus teoremas son propios del formalismo y no de la razón humana, aunque haga la suposición implícita, de que los objetos matemáticos no pueden ser construcciones mentales del hombre porque, en ese caso, serían las proposiciones acerca de los mismos decidibles. Y esta última suposición es altamente discutible porque, como ya he indicado, la propia imaginación crea monstruos. En este aspecto el término 'mecanicismo' cabe tomarlo en el sentido dado por las máquinas de Turing. En este caso, el carácter no mecánico de la actividad matemática del hombre frente a tal carácter de la máquina de Turing no parece confirmado por los teoremas de incompletitud e indecidibilidad, salvo hacer la suposición de que lo producido en la actividad mental sea estrictamente recursivo. Ello obliga a realizar una distinción: una cosa es la actividad más o menos imaginativa y creadora del matemático y otra el producto obtenido en dicha actividad. Y no puede asegurarse el carácter algorítmico de ambos. Y los teoremas de limitación se refieren al producto de esa actividad. Y si bien la máquina de Turing es incapaz de demostrar de una proposición particular que la misma o su negación son demostrables, el propio individuo muestra la misma limitación ya que es impotente para demostrar la consistencia de un sistema como P sin utilizar medios transfinitos. Medios transfinitos que se le han prohibido manejar, de antemano, a la máquina. Pero, por otro lado, no veo en modo alguno, que el aspecto mecanicista así señalado afecte al aspecto materialista opuesto al espiritualismo. En todo caso, creo que es un problema que, hasta una precisión mayor en los términos 'máquina' y 'cerebro', seguirá el campo especulativo, sin más adelantos.

c) Cabría interpretar estas limitaciones, por ahora, y hasta una clarificación de términos como los anteriores, como propias del conocimiento global. Quiero decir, cabría interpretar estas limitaciones, tanto de las teorías intuitivas como de los sistemas formales, como algo ligado al propio proceso cognoscitivo humano. Las limitaciones surgen, en la construcción y el conocimiento de las teorías, cuando se pretende que sean lo suficientemente potentes para reflejar tanto la Aritmética elemental como para poder hablar de sí mismas; si la potencia se rebaja, surgen teorías que son completas y decidibles. La propia Aritmética sin la operación producto es completa y decidible, como demostró Presburger en 1929. En cuanto el sistema es lo suficientemente potente, pasa a un nivel del mismo tipo que el lenguaje común y es, por tanto, inconsistente. De aquí que, enlazando con la herramienta constructiva axiomática, y a partir de las demostraciones de incompletitud, quepa admitir el manejo si no de la contradicción, sí de la impredicatividad como un instrumento más, como una herramienta de todo el proceso cognoscitivo humano —al igual que lo es en la conducta—, pero siempre que la misma pueda ser acotada y precisados los entornos en los cuales se presente, y a condición de que siempre que sea posible sustituir una demostración impredicativa por una predicativa, dicha sustitución se realice. En otras palabras, cabe admitir el uso de lógicas minimales para cada campo concreto de trabajo, y ello en función de que los teoremas de limitación muestran como incompatibles entre sí los conceptos de completitud, de consistencia y de potencia suficiente para hablar de sí mismos.

Manteniéndonos en este campo especulativo puede indicarse, igualmente, que algunos ven una separación entre la Lógica L_1 y la Matemática en el hecho de que L_1 es completa y, sin embargo, en cuanto se pretende expresar la Matemática, entonces el sistema se hace formalmente incompletable. Por esta razón, para algunos, la Lógica se muestra analítica y transparente a la razón, mientras que la Matemática supone una construcción de carácter más bien sintético. Opinión personal, ciertamente, pero que olvida que L_1 es indecidible, por lo que se mostrarían como más transparentes a la razón aquellas teorías que además de completas fueran decidibles, para lo cual basta agregar a los axiomas de L_1 otros axiomas escritos en el mismo lenguaje formal, cambiando, como indicó Gödel en 1931, el conjunto de proposiciones decidibles y transparentes a la razón. En este caso, teorías como la de los cuerpos algebraicos cerrados —con característica cero o primo— o la de los grupos abelianos libres sin torsión, por ser completas y decidibles se mostrarían como más transparentes aún a la razón que la propia Lógica...

d) En cuanto a posibles consecuencias e interpretaciones de corte epistemológico, debo destacar el hecho de que los teoremas de limitación permiten distinguir entre demostración o derivación formal, sintáctica, y deducibilidad o consecuencia semántica, además de la demostración «ordinaria». La primera es intrínseca al sistema formal; la segunda hace referencia a las relaciones entre sistema formal y modelo. La primera es recursivamente numerable, lo que no ocurre a la segunda. Este último hecho demostrado no por la incompletitud, sino por la indefinibilidad tarskiana. Que ambas no coinciden, constituyen la indecidibilidad. Distinción epistemológica fundamental entre 'demostración formal' y 'verdad' en un modelo, que a pesar de tener su origen en Frege ha mostrado dificultades de captación entre algunos filósofos, especialmente entre quienes enfocan la Lógica como un juego de lenguaje. Así, por ejemplo, la no distinción entre 'proposición demostrable' en el interior de un sistema formal y 'proposición verdadera' en un modelo de dicho sistema es la clave de la incomprensión de un Wittgenstein respecto al teorema de incompletitud de Gödel y su formulación de todo un haz de incoherencias.

En cuanto a la demostración «ordinaria» y la formal debe insistirse en el hecho de que esta última es relativa tanto al lenguaje formal —con sus tipos de variable, conectivos, cuantificadores...— como, fundamentalmente, a las reglas que se adopten en la descripción sintáctica de dicho lenguaje. Por supuesto, se pretende que tales reglas formales reflejen la marcha del pensador, los recursos de éste; pero es pretensión nunca lograda. Entre otras cuestiones porque tal marcha deductiva material pertenece a los terrenos de la psicología. Entra en una categoría intuitiva de «verdad» que no se corresponde, en general, a la sucesión sintáctica —y una sucesión impone una ordenación lineal de proposiciones—. Categoría de «verdad» —y no hago referencia al concepto de «verdad» establecido por Tarski— por la cual de una proposición se pregunta, en general, si es verdadera, no si está demostrada, aunque posteriormente se quiera identificar tal respuesta mediante el enlace con la demostración. En este punto debo recordar que un teorema como el considerado como fundamental del álgebra fue enunciado, sin demostración, por Descartes. D'Alembert intentó su demostración reiteradamente y las dio equivocadas. Gauss fue el primero en dar algunas demostraciones correctas. Sin embargo, todos los algebristas manejaban el teorema fundamental del álgebra como expresando una proposición «verdadera», aunque fueran conscientes de que no había sido demostrada. Y, por esta convicción, el problema algebraico por excelencia se centró en la resolución de ecuaciones. En este punto los teoremas de Gödel permiten limitar algunos viejos mitos y tópicos de que el hacer matemático se centra, exclusivamente, en la demostración formal. Al menos, han permitido distinguir entre los tres tipos de demostración señalados y, con ello, potencia lo que cabe calificar de rigor informal en la demostración matemática.

Enlaza, la distinción epistemológica anterior, con la problemática de si la axiomatización y la formalización son adecuadas para el hacer matemático. Desde un punto de vista estrictamente intuicionista la cuestión no existe, porque no se admite la segunda componente, la axiomatizadora. Sin llegar a este extremo, un constructivista en la línea Poincaré-Skolem negaría la total adecuación de la axiomatización y, mucho más, de la formalización global de la Matemática. Lo cual no equivale a rechazar el empleo de dichos recursos. No voy a insistir, aquí, en el papel clarificador que juega el intento formalizador —no sólo por permitir la información de su propia limitación—, cuando analiza una idea en sus varias componentes; aunque sí en el hecho de que un enfoque estrictamente formalizador de viejas ideas puede ocultar, enmascarar lo que en ellas queda prescrito, sólo renovado tras una segunda visión. Lo que deseo destacar es que si el empleo de una formalización global, de una axiomatización global debe ser rechazado, no debe serlo el empleo del método axiomático para las teorías concretas, para la caracterización de las estructuras matemáticas, independientemente del contenido más o menos «filosófico» del formalismo. Y ello porque este método es una herramienta fundamental del hacer matemático. Herramienta, así acotada, de carácter estrictamente constructivo si se tiene el cuidado de demostrar la existencia de la estructura por él caracterizada mediante una ejemplificación adecuada, mediante un modelo de cardinal a lo sumo numerable. Este enfoque de considerar la estructura como nuevo objeto de trabajo, sólo factible desde el empleo sistemático de la axiomatización, puede ejemplificarse con el propio Gödel, que parte de esta perspectiva en la elaboración de su trabajo; o en el constructivista Kolmogorov, primero en axiomatizar la Teoría de la probabilidad, independizándola de las dificultades conceptuales que mostraba la definición clásica de límite de frecuencias...

e) En otro plano cabe citar, aquí, como ejemplo de crítica a la demostración original de Gödel la realizada por Rieger. Viene a indicar que, junto a la axiomatizabilidad de P, la ω-consistencia y la representabilidad sintáctica de las funciones primitivo-recursivas en P, Gödel hace uso de la existencia de una biyección entre los números naturales y los numerales en P. Uso implícito, ciertamente, y Rieger lo ha destacado. Las consecuencias que obtiene de este hecho abonan una interpretación relativista de la demostración gödeliana. Para todo matemático, en general, la noción de número natural, está determinada de manera unívoca; el conjunto que constituyen, también está perfectamente determinado. En defensa de esta idea, precisamente, se han manifestado los constructivistas rechazando la definición logicista o la conjuntista de los números naturales como excesivamente artificiales y más conflictivas de lo que pretenden fundamentar o definir. Desde este enfoque, la correspondencia biyectiva, implícitamente admitida por Gödel, es radicalmente aceptable. Ahora bien, como señala Rieger, Skolem demostró la existencia de conjuntos de naturales no canónicos. Los axiomas de Peano quedan satisfechos por muchos conjuntos de «naturales». De esta manera, puede elegirse como conjunto de números naturales el estimado como canónico; pero puede elegirse otro de los conjuntos no isomorfo con el anterior como instrumento para materializar la longitud de las fórmulas y demostraciones. Al no ser isomorfos, la biyección establecida se viene abajo. Y, con ella, la posibilidad de la autorreferencia. La demostración de incompletitud gödeliana, por parcial, no demuestra que el sistema P sea incompleto en general, sino sólo para un caso parcial.

Si se observan las tres condiciones que hacen posible el teorema del punto fijo en P y sistemas relacionados, resulta que tanto la axiomatizabilidad como la ω-consistencia son condiciones que tales sistemas verifican por construcción. Incluso la propia condición de ω-consistencia puede ser eliminada en beneficio de la consistencia simple, como demostró Rosser en 1936, empleando para ello una fórmula no tan «natural» como la utilizada por Gödel. La condición clave, entonces, es la representabilidad en P o en los sistemas afines de las funciones primitivo-recursivas. Ahora bien, dada una relación como la σ de sustitución gödeliana resulta que al hacer su definición sintáctica por una fórmula α en P se utilizan, en general, otras condiciones que pueden ser más generales que las que caracterizan a la propia relación σ. De aquí que, como Bernays señalara, pueda haber fórmulas que representen sintácticamente a σ en P y que puedan no ser indecidibles, sino demostrables. De hecho, Bernays dio una fórmula de este tipo. Vuelve a repetirse el argumento de adecuación, de la traducción formal de una proposición aritmética, y del relativismo de los términos empleados en la metamatemática. Y, de aquí, la posibilidad interpretativa de no dar trascendencia alguna a tales proposiciones indecidibles, ya que hay otras que no lo son.

Sin embargo, desde mi punto de vista, lo que puede ser más interesante se centra en el hecho de que la representabilidad sintáctica indica la posibilidad de que las definiciones recursivas sean transcritas como definiciones explícitas. Desde un enfoque estrictamente constructivista tal posibilidad debe ser negada. Y aquí se centra una posible interpretación del teorema de incompletitud: Al pretender absorber el mecanismo creador inductivo mediante la definición formal explícita, el aspecto creador iterativo se desvirtúa; el sistema no puede ser, entonces, completo por no reflejar ese carácter iterativo.

El mecanismo demostrativo gödeliano es de doble camino. Si bien parece invertir el programa logicista de querer fundamentar la Aritmética en la Lógica mediante la aritmetización sintáctica —proceso que constituye el punto de partida de la computabilidad—, Gödel da un paso de vuelta e intenta formalizar el predicado aritmético, es decir, vuelve a intentar la definición formal de la reducción anterior, mediante el concepto de definición sintáctica. Sin embargo, el método inductivo que se refleja en la definición recursiva posee una nota esencial de la que carece la Lógica: su constructivismo iterativo, el hecho de que cada elemento que se define —sea objeto, relación o función— se construye paso a paso a partir de los elementos anteriores. Aspecto que ha recibido el nombre de creatividad de la inducción. Carácter iterativo que hay que utilizar en la propia construcción sintáctica de la Lógica, de su lenguaje, que exige el empleo de la definición inductiva para caracterizar tanto las clases de fórmulas como las clases de fórmulas bien formadas, aunque pretenda ocultarse el hecho mediante definiciones conjuntistas. La circularidad, aunque se quiera que la misma no existe en el proceso gödeliano porque la descripción se realiza en el metalenguaje del lenguaje de L_1, se hará presente en cuanto dicho metalenguaje quede incorporado en el lenguaje.

Por supuesto con el mecanismo de Gödel las definiciones recursivas primitivas «parecen» poder expresarse en una proposición lógica que aúna los dos momentos de la definición inductiva. En base a este hecho, he indicado que el sistema formal no puede mostrarse más que incompleto, porque en dicha proposición se ha perdido el carácter iterativo propio de las dos fases inductivas.

(Realmente, se tiene aquí un problema lógico no formal no muy tratado: la creatividad de la definición —no, por supuesto, de la definición formalizada, de la definición en el interior del sistema formal, que se mostrará como mera abreviatura—. Creatividad centrada, en uno de los aspectos, en la recursividad. Y hay que observar que, junto a las funciones primitivo-recursivas existen otras funciones recursivas que, como mostrará Tarski, no pueden reducirse a las definiciones inductivas ordinarias de forma puramente aritmética. Y, junto a ellas, las funciones recursivas generales de Herbrand-Gödel-Kleene que no reflejan únicamente la iteración, sino la igualdad de ecuaciones).

Por otro lado, si se observa la demostración del teorema del punto fijo, cabe observar que la función que en ella se construye, así como la de sustitución de Gödel, se construye haciendo uso del proceso diagonal de Cantor, proceso radicalmente impredicativo. Proceso imposible de evitar para dicha demostración —y de ahí el nombre de teorema del punto fijo de diagonalización—. La impredicatividad no constructiva, la autorreferencia hace su entrada por el empleo del método diagonal. De esta manera se produce el paso Diagonalización-Indecidibilidad. Proceso válido, en principio y sin reservas, para quien adopte una posición platónica en el hacer matemático, como aceptó Gödel, no para quien adopte una posición constructivista.

Se puede apuntar que el programa logicista, en cuanto a los problemas de fundamentación, recibe una plena confirmación en cuanto al primer apartado y una negación en cuanto al segundo. En el primero —construcción de la Lógica formal— puede admitirse que a través de la escuela formalista y de los propios trabajos de Gödel, la Lógica ha quedado plenamente elaborada y, por así decir, clausurada, cerrada. Incluso, a través de la teoría de modelos de Tarski han podido establecerse, como ya he indicado, las condiciones que satisfacen L_1 y todos sus equivalentes: las propiedades de compacticidad y la de Löwenheim-Skolem-Tarski.

En el segundo, y que era el motor esencial del programa —reducción y fundamento consiguiente de la Matemática a la Lógica—, el logicismo se ha mostrado insostenible. Y en este aspecto sí han sido decisivos los aportes de Gödel. Aportes que han mostrado, al ser incompleta la Lógica, que no puede reflejar el aspecto esencialmente creador del pensamiento matemático. Aportes que, en todo caso, han manifestado que dicha reducción no sería más que relativa, traducción de unos sistemas formales en otros, como lo fue la realizada por Hilbert de la Geometría en la Aritmética. Y ello porque la propia Lógica matemática se ha convertido en un sistema formal más, ya clausurado, como puede serlo una estructura matemática como la teoría de grupos o la de espacios topológicos, lo cual exige que sea tratada con métodos matemáticos. Lógica matemática como estudio matemático de sistemas formales que pretenden formalizar un tipo de operador como la consecuencia sintáctica, el intuitivo «se sigue de...», junto a un tipo de conectivos y cuantificadores determinado.

Consideración de la Lógica matemática como nuevo campo de trabajo matemático originado tras el programa filosófico previo hilbertiano, y señalado explícitamente por Kolmogorov desde 1925, reafirmado tras los trabajos de Gödel de 1930 y 1931.

La pretensión reduccionista se ha manifestado contraria al proceso histórico: la potencia axiomatizadora y formalizadora del pensamiento creador matemático ha absorbido, en cada ocasión, a los distintos tipos de lógica, en cuanto éstos asoman a la formalización. Y aquí podría afirmarse que el programa hilbertiano se ha cumplido, aunque no en el aspecto justificacionista, sino en el axiomatizador: Si la Lógica matemática se enfoca como un producto de la razón, entonces no podrá justificar —menos aún fundamentar— un producto de la imaginación; y es donde puede afirmarse que el programa justificacionista ha triunfado mediante su fracaso: lo estrictamente sígnico no puede justificar lo imaginativo. Y si la Lógica matemática se enfoca como un producto matemático más, entonces permanece en el mismo plano que cualquier otro producto matemático, en el simbólico, por lo que únicamente permitirá el establecimiento de relaciones internas a las construcciones matemáticas.

5. *El realismo de Gödel*

Tras haber expuesto alguna de las contribuciones de Gödel a la Lógica matemática y alguna de las muchas interpretaciones a que dichas contribuciones han dado paso, parece natural preguntarse por las ideas del propio Gödel respecto a su trabajo y al contenido del mismo, respecto a la Lógica matemática. En este terreno el matemático austríaco no ha escrito mucho, quedando reducida realmente la expresión de sus ideas a los ensayos de 1944 y 1947 con las notas y adiciones a las reediciones posteriores.

Por lo pronto Gödel hace una nítida distinción en la Lógica matemática. Por un lado, es una disciplina matemática más. Como tal, cualquier instrumento le parece, en principio, válido. Por otra parte, junto a ese desarrollo interno, pragmático matemático, Gödel admite la existencia de un plano no intrínsecamente matemático; un plano de precisión y clarificación de conceptos, de fundamentación en una búsqueda de nuevos principios que clarifiquen lo ya logrado y orienten la búsqueda de nuevos elementos. Es un plano propio del filósofo de la matemática, de la Lógica matemática. Incluso algunos problemas matemáticos, en cuanto a su solución, van a depender de dicha clarificación conceptual; y problemas que el matemático tiene planteados desde tiempo atrás sólo podrán resolverse, para Gödel, mediante el encuentro de nuevos axiomas, de nuevas suposiciones que trascienden, en algún momento, los terrenos intrínsecos matemáticos.

Gödel adopta, así, una posición parecida a la de Hilbert en cuanto a esa escisión y al uso de cualesquiera procedimientos en el hacer matemático. Pero no admite que el segundo plano sea meramente justificacionista, dado que el mismo proceso de justificación hilbertiano requiere del hacer lógico matemático y queda, por ello, interiorizado en la matemática. Gödel se sitúa en plena línea logicista de Frege, Peano, Russell. Así, en 1944, tras admitir que la Lógica matemática no es otra cosa que la formulación precisa y completa de la Lógica formal, reconoce la escisión de la misma en dos aspectos: a) Tratamiento puramente matemático y, entonces, la Lógica matemática se ocupa de clases, relaciones, combinaciones de símbolos..., lo cual indica que la teoría formal de conjuntos queda incluida en el campo lógico matemático como una parcela más del hacer matemático. Resalto la contraposición que Gödel hace con otras disciplinas matemáticas: disciplinas cuyo objeto es, y va en paralelo a los tres términos anteriores, el número, las funciones, las figuras geométricas. b) Lógica como ciencia previa a todas las demás, conteniendo las ideas y principios comunes y subyacentes a todas las ciencias. Es lo que cabe calificar en el sentido de Lógica como fundamento, pero a diferencia de la pretensión de los logicistas anteriores, como fundamento a nivel informal, porque incluso el aspecto metateórico, por sintáctico, pertenece al hacer matemático. Nivel informal pero no por ello menos orientador de la propia praxis del matemático y del trabajo lógico matemático.

Que esta idea sea la propia de Gödel —con la distinción pragmática-funcional y el empleo de cualquier herramienta en la primera—, se refuerza a lo largo del ensayo de 1944, especialmente al referirse a la teoría de los órdenes de PM: «La teoría de órdenes resulta más útil si se la considera desde un punto de vista puramente matemático, independientemente de la cuestión filosófica de si las definiciones impredicativas son admisibles. Enfocado de esta manera, es decir, como una teoría construida en el interior de la matemática ordinaria, donde las definiciones impredicativas son admitidas, no hay objeción alguna para extenderla a órdenes transfinitos arbitrariamente elevados».

La dicotomía la apoya también Gödel en una justificación filosófica, en una toma de posición calificable de «metafísica», por hacer referencia al plano existencial de los objetos matemáticos. Posición que no es otra que la de realismo ontológico, radicalmente asumido. Y tan radicalmente que Gödel no puede evitar una muy dura crítica a Russell por no haberse mantenido en dicha concepción realista y haber sucumbido, a lo largo de su evolución filosófica, a los preceptos de la «navaja de Occam», intentando eliminar todo tipo de realidades, incluso la de las clases, la de los conjuntos. Gödel parte de que la Matemática, y la Lógica matemática como una parte propia suya, es una ciencia estrictamente empírica, es una ciencia natural más. Así, los axiomas de la lógica y la matemática son equiparables a las leyes de la naturaleza y la evidencia lógica es equiparable a la percepción sensible. Ello conduce a admitir que tales axiomas, como las leyes naturales, no tienen por qué ser evidentes por sí mismos, sino que su propia justificación se apoya en el hecho de que permiten que las «percepciones sensibles» puedan ser deducidas. Aunque tales axiomas, como las leyes de la naturaleza, lleguen a poseer cierto grado de credibilidad intrínseca. Actitud de realismo absoluto que se plasma en palabras tan reiteradamente citadas:

«Las clases y conceptos, sin embargo, pueden ser concebidos como objetos reales; las clases como 'pluralidades de cosas' o como estructuras que consisten de una pluralidad de cosas; los conceptos como las propiedades y relaciones de cosas que existen independientemente de nuestras definiciones y construcciones.

«Me parece que la suposición de tales objetos es tan legítima como la suposición de los cuerpos físicos y hay bastantes razones para creer en su existencia. Para obtener un sistema satisfactorio de la matemática son tan necesarios, en el mismo sentido que los cuerpos físicos son necesarios para una teoría satisfactoria de nuestras percepciones sensibles».

Palabras que refuerza en 1947 al señalar que los objetos matemáticos existen independientemente de nosotros, de nuestros conocimientos, de nuestra intuición de ellos.

Desde esta posición Gödel realiza dos tipos de análisis: Por un lado, una crítica respecto a las causas que provocaron las crisis en los fundamentos de la matemática; causas que se centran, en Russell, en el uso del impredicativismo. Por otro lado, un intento de búsqueda de posibles vías, de nuevos axiomas para superar un problema en principio indecidible, el problema del continuo. Este último, en línea con la concepción realista, según la cual el matemático es un naturalista más, y para lograr un conocimiento completo de los objetos que describe requiere el empleo y búsqueda consiguiente de nuevos principios que le permitan la deducción de las propiedades que percibe en dichos objetos, de las relaciones que guardan entre sí. Problema del continuo perteneciente a la Lógica matemática en sus dos versiones, pragmática-justificacionista, al que volveré más tarde.

Respecto a la crisis de los fundamentos Gödel discute qué sea el impredicativismo tan denostado por Poincaré y Russell, con la secuela, para este último, del principio del círculo vicioso: La falacia consiste en la circunstancia de que uno define (o supone tácitamente) totalidades, cuya existencia implica la existencia de nuevos elementos de la totalidad, elementos definibles o que envuelven o presuponen la totalidad completa. El principio del círculo vicioso creado por Russell trata de impedir tal falacia, impidiendo definir un objeto en términos de él mismo. Pero Gödel ve que en dicho principio hay, realmente, tres distintos según se ponga el acento en «definible en términos de», «envolviendo» o «presuponiendo», respectivamente. Y sólo el primero sería el productor de antinomias. Ahora bien, Gödel rechaza que la causa de dichas antinomias resida, precisamente, en dicho principio —conclusión semejante a la de Poincaré, quien ve la causa en la aceptación de la existencia del infinito y, mera consecuencia de tal suposición existencial, aparece el impredicativismo— y, consecuentemente, niega la validez del principio del círculo vicioso de Russell. Rechazo apoyado en varias argumentaciones de carácter muy desigual:

1. Argumento pragmático: la matemática ordinaria, especialmente en los terrenos del Análisis clásico, hace uso de la impredicatividad. Prueba de que tal matemática no es falsa, sino que es el principio del círculo vicioso el que es falso. Argumento, el de Gödel, repetición del ya lanzado contra Poincaré por Zermelo, insostenible en el plano lógico, conceptual, recordatorio del viejo adagio «el movimiento se demuestra andando»...

2. Se puede negar que la referencia a una totalidad envuelva necesariamente a todos y cada uno de sus elementos singulares. Es decir, se puede negar que la cuantificación universal tenga que identificarse necesariamente con la conjunción infinita. En este caso, dicha cuantificación, que en el rigor informal de la Lógica matemática en su plano de fundamentos, no es otra cosa que «todos», puede interpretarse en el sentido de necesidad, demostrabilidad, analiticidad..., con lo cual la posible circularidad desaparece.

3. Y es el argumento gödeliano clave: Aun admitiendo que «todos» equivalga a una conjunción infinita, la impredicatividad tampoco se aplica a la descripción ni a la construcción conceptual. Y ello porque si es auténticamente construcción, la misma se refleja en una descripción, por lo cual jamás podrá implicar la totalidad; es esa totalidad la que se va construyendo paso a paso y la circularidad es imposible. Construcción que, sin embargo, no admite Gödel, porque supondría —como ya he apuntado antes— la decidibilidad de lo construido, la recursividad del paso a paso. Y Gödel reafirma entonces su realismo radical: al admitir la realidad de los objetos matemáticos, la circularidad no existe, porque el impredicativismo sólo puede referirse a la descripción o caracterización de dichos objetos. Y es la distinción entre existencia y conocimiento y descripción de esa existencia. De aquí que sólo el nominalista tendrá problemas con la impredicatividad y ello por identificar una noción con un símbolo. Impredicativismo que no afecta, por el contrario, ni al constructivismo ni al logicismo realista.

Aún más, Gödel radicaliza su posición ontológica cuando indica que admite la existencia de los objetos matemáticos como entes reales de dos tipos: clases, que no son creadas sino meramente descritas por sus definiciones, con lo cual la circularidad para ellas no existe, y conceptos. El problema se centra en la existencia de este último tipo de ente real. Gödel ha indicado que los conceptos pueden interpretarse como las propiedades y relaciones de cosas que existen objetivamente. Afirma: «Como los conceptos se supone que existen objetivamente no es contradictoria la impredicatividad, que sólo afecta a la construcción de su significado», es decir, a la explicación de éste, explicación equiparable a la aserción que puede hacerse respecto a las percepciones sensibles. Naturalmente, si se acepta la teoría simple de tipos —la manejada en la descripción de P en 1931—, por la cual las relaciones aparecen como clases, tales conceptos quedan remitidos, en cuanto a su existencia, a dichas clases.

La consecuencia es clara: el impredicativismo sólo afecta al nominalismo. Para el realismo las falacias no se encuentran motivadas por ciertas autorreferencias de los términos primitivos, sino en otras causas. Cuáles sean éstas, no las especifica Gödel. Unicamente señala que los conceptos clave como «concepto» y «clase» no son excesivamente claros en el plano de la Lógica como fundamentos, y que necesitan clarificación —no así en el hacer intrínseco matemático donde se da de partida una definición rigurosa, axiomática o formal a la que hay que atenerse en el desarrollo posterior, aunque la misma no llegue a coincidir con la noción más o menos intuitiva que se asocia con ella—. La ausencia de tal clarificación constituye el factor decisivo tanto de la aparición de las falacias como de la imposibilidad que el matemático tiene, de momento, para plasmar el objetivo de la *characteristica universalis* de Leibniz, recogido por Peano, para la elaboración de un algoritmo lógico para la resolución sistemática de problemas matemáticos. Clarificación que entraña, en el plano de fundamentos, la búsqueda de nuevos axiomas, de nuevas leyes de la naturaleza eidética, de los cuales derivar todo el conocimiento que de los objetos matemáticos y sus propiedades y relaciones va logrando el hombre en su trabajo empírico conceptual.

Naturalmente Gödel supera el impredicativismo conservando a la vez toda la matemática ordinaria clásica mediante la admisión de una hipótesis muy fuerte: la existencia de los objetos matemáticos, en particular de las clases. Consecuentemente, del infinito actual con su correspondiente escala de transfinitos. Y, en esta línea es en la que se situará precisamente ante el Problema del continuo, al señalar la necesidad de admitir postulados cada vez más potentes del infinito como medio para la decidibilidad de la proposición que plantea dicho problema. Línea que mostrará, sin embargo, su fracaso tras los trabajos de Levy y Solovay.

El realismo más que platónico de enfoques como el gödeliano ha recibido algunas críticas. Muchas, en el fondo, no le afectan. Por ejemplo, la que afirma que es un enfoque excesivamente metafísico. Tampoco la que insiste en el hecho de que atenta al propio teorema de incompletitud en el sentido de que todos los sistemas de axiomas son incompletos. Para demostrar, por ejemplo, la inducción completa, el realista debe requerir axiomas fuertes del infinito, a pesar de lo cual en tales sistemas de axiomas habrá enunciados aritméticos formalmente indecidibles a partir de dichos axiomas. Ello implica que las hipótesis existenciales afectan fuertemente al cuerpo de los teoremas, de las proposiciones demostrables. Lo cual había sido afirmado ya por el propio Gödel en 1931 —y he hecho referencia en el punto 2.3—. Para Gödel, para cualquier realista, es objeción carente de fundamento o apoyada en el error de confundir existencia con conocimiento de dicha existencia. De ahí, precisamente, el objeto que todo naturalista se plantea: obtener nuevos axiomas que permitan aumentar el número de teoremas demostrables, porque el conocimiento es limitado, siempre. Y en este sentido se inscribe la idea de Gödel. Los sistemas de axiomas no pueden estimarse nunca como cerrados sino, por el contrario, ha de admitirse la iteración de adjuntar nuevos axiomas porque, con ello, aumenta el número de proposiciones decidibles, incluso en aquel caso en el cual tales axiomas se descubran para un fin determinado, en una teoría concreta. Dichos axiomas no afectan tan sólo al problema o teoría particular, sino al total del conocimiento, a las restantes teorías. La objeción, pues, es inocua, porque no hace otra cosa que afirmar lo que el propio realista afirma como punto de partida para su investigación: que el conocimiento no es global, no es total, de la realidad que nos circunda.

Desde mi punto de vista, la posición de Gödel es la posición de matemático auténticamente pragmático, y en el que tanto su teorema de incompletitud como el de la longitud de las demostraciones han influido para la posterior toma de posición realista. El matemático pragmático acepta la existencia del objeto matemático por palabras como las que antes he citado del propio Gödel: Para obtener un sistema satisfactorio de la matemática... Quien trabaja en matemática sabe, perfectamente, de la absoluta realidad con la que se le presentan los conceptos que maneja; realidad que se le impone y con más fuerza que la realidad de los objetos físicos, materiales, que le rodean. Una mesa puede destruirse o transformarse en otro objeto; el concepto axiomático de grupo, no. Las propiedades de la mesa son accidentales, pero aquellas que se obtienen de la noción de grupo son esenciales, necesarias para tal estructura. Y esta objetividad que le trasciende y que es tal que las propiedades que de la misma dependen se muestren con un grado de necesidad absoluta, y no como el color de la mesa, le llevan a admitir un platonismo más radical que el platonismo de Platón, y multiplica entonces el mundo de seres objetivos, desligados de su propio conocimiento, de su posible intuición.

Ahora bien, estos rasgos de objetividad son característicos de todo concepto creado, construido por el hombre. Y esa creación de un mundo conceptual no tiene por qué estar desligada de aquél que la ha hecho posible, e incardinada en seres eidéticos de naturaleza más o menos angélica. No hay por qué admitir una intuición lógica que haga el papel de la percepción sensible —que, por otro lado, para Gödel, no parece presentar problema alguno—. En este sentido el objeto matemático no tiene por qué presentarse como una cosa aislada, sino como una construcción de la imaginación en forma de estructura formal, donde lo que importa no es el objeto individual en sí o agrupado en conjunto, sino la estructura en la cual se encuentra incardinado y que es la que posibilita todas sus propiedades. El ladrillo o un montón de ladrillos no constituyen un edificio. Y ello de tal manera que un mismo objeto individual puede ser definido en formas muy distintas; así, por ejemplo, el número natural. Y, sin embargo, lo importante de esas definiciones no es el número individual; lo importante es la caracterización de la progresión de la que forma parte, la estructura recursiva en la que dicho número se inserta y de la cual se obtienen todas sus propiedades. Y es lo que el mismo Dedekind tuvo que encontrar cuando pretendió la clarificación del concepto de número natural

Gödel no dio, sin embargo, el paso que estaba prescrito, implícito, en el origen de su trabajo: la inversión ontológica, permaneciendo en un realismo superado. Inversión ontológica que, en lugar de mantener el cuadro cantoriano, el de finales del siglo XIX, en el que los objetos matemáticos eran el 'conjunto' y las 'aplicaciones' entre conjuntos —para Gödel, las 'clases' y los 'conceptos'; para Frege, el 'concepto' y la 'relación'—, llega a la convicción de que el objeto matemático individualizado carece de sentido y se adopta como nuevo objeto la estructura formal y los morfismos entre estructuras. Y no sólo el objeto individualizado, sino el propio término 'conjunto', carente de sentido para el hacer matemático si el mismo no deja de ser, simplemente, conjunto y pasa a convertirse en conjunto estructurado. Es el paso a un hacer de estructuras que se plasmará definitivamente en los entornos de 1939, con la aportación del grupo Bourbaki. Pero comporta un salto epistemológico en el que se insertará, por su lado, la teoría de modelos que se constituye como álgebra universal más lógica.

Si se acepta este enfoque consecuente con la ruptura epistemológica del nuevo hacer matemático, cabe oponer a la metafísica realista de Gödel otro tipo de metafísica: la que sostiene que la estructura formal es una construcción de la especie humana, una creación de la actividad imaginativa del hombre. Lo que no quiere decir, como se confunde frecuentemente, que sea arbitraria, puramente convencional y producto de la nada. Convencional, como todo producto humano, hasta el mismo punto en el que una catedral gótica o una fuga al órgano, como productos humanos, pero con su rígida estructuración, sus proporciones y su simbología inherentes, son convencionales (Barker 1969, Bernays 1935, de Lorenzo 1977).

C) *Gödel y la hipótesis y el problema del continuo*

Uno de los planos creados por Cantor se centra en la escala de infinitos, la escala de cardinalidades. El método de la diagonal permite a Cantor demostrar el teorema que hoy lleva su nombre: $\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(X))$. Con él, ha demostrado que la escala de cardinales transfinitos no se encuentra acotada por cardinal superior alguno. Igualmente, el teorema de Cantor - Bernstein permite asegurar que los cardinales constituyen una clase totalmente ordenada. Finalmente, y en este orden de cuestiones, Zermelo demuestra que los cardinales transfinitos no sólo constituyen una cadena, sino una cadena bien ordenada, para lo cual debe utilizar el método codificado proposicionalmente con el nombre de axioma de elección. Además, Cantor generaliza el método de inducción completa y lo aplica a esta sucesión de cardinales transfinitos mediante el método de inducción transfinita.

Al constituir una cadena bien ordenada, la imagen geométrica inmediata asociada es la de una cadena transitiva, es decir, no cerrada, en la que dado un cardinal $\aleph$ el eslabón siguiente ha de ser $2^{\aleph}$. El teorema de Cantor asegura que $\aleph < 2^{\aleph}$. Y Cantor intenta, en concreto, demostrar que entre $\aleph_0$ y $2^{\aleph_0}$ no existe ningún otro cardinal. Intento de demostración que no logra coronar con éxito. Como se puede demostrar que R tiene como potencia $2^{\aleph_0}$, Cantor conjetura, entonces, la igualdad $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, que constituye la Hipótesis del continuo, H. Hipótesis generalizada, HG, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$

Junto a esta hipótesis del continuo se tiene otra cuestión íntimamente ligada con ella, el Problema del continuo. Este problema consiste en determinar el lugar que ocupa el continuo en la escala de los cardinales transfinitos, es decir, determinar el ordinal α para el cual $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$. Problema que admite, implícitamente, que el continuo es un cardinal transfinito. Si HC fuera verdadera, inmediatamente se tendría asegurado que $\alpha = 1$. Pero cabe observar que lo que se sabe es que α no puede ser ω —teorema de König—. Y aún más, que $2^{\aleph_0}$ no puede ser igual a $\aleph_\alpha$ con α número transfinito de segunda clase y segunda especie. Lo que se sabe es una mera cuestión de acotación. En términos más intuitivos, y con las palabras textuales de Gödel 1947, el continuo establecería: «¿Cuántos puntos hay sobre una línea recta en el espacio euclídeo? Una cuestión equivalente es ¿cuántos conjuntos diferentes de enteros existen?».

Si Cantor no pudo demostrar H, los enlaces con el axioma de elección y la importancia de la hipótesis tanto para el problema del continuo como para campos como el de las categorías de Baire o el de la medida de Lebesgue, convirtieron el tema de su demostración en terreno de trabajo matemático intenso. Ante los sucesivos fracasos demostrativos, el propio Hilbert intenta aplicar en 1925 el método metamatemático para demostrar H, sin gran éxito. En 1934 Sierpinski publica un libro dedicado íntegramente a las equivalencias de H con otras proposiciones matemáticas, con el claro reconocimiento de que H no ha podido ser demostrado y el práctico convencimiento de que tal demostración se hace imposible, salvo que se acepte algún nuevo axioma junto a los ya admitidos en la teoría de conjuntos.

Será en 1938 cuando Gödel, ya asentado definitivamente en Norteamérica, se dedique al problema y demuestre la consistencia de la hipótesis generalizada del continuo y del axioma de elección con los axiomas de la teoría de conjuntos. Gödel, una vez más, va a dar la razón a la intuición de Skolem porque, para ello, y en la línea sugerida por Sierpinski, necesita agregar un nuevo axioma a dicha teoría. Lo que en realidad demuestra Gödel es que la negación de HG no puede ser deducida de los restantes axiomas de la teoría de conjuntos, si se supone que dichos axiomas son consistentes. Y será Cohen, en 1963, quien demuestre, mediante la creación de un nuevo método, el *forcing* o de constricción, que si los axiomas de la teoría de conjuntos son consistentes, entonces HG no puede ser deducida de los mismos. Con ello culmina el proceso de demostrar que HG es independiente de los restantes axiomas de la teoría conjuntista.

La idea de Gödel se basa en la construcción de un modelo L de la teoría de conjuntos V —que axiomatiza mediante un sistema en el que sigue la idea de Cantor de escindir los conjuntos en dos clases, los conjuntos y las clases, y que constituye la axiomatización Neumann-Bernays-Gödel— en el cual tanto la hipótesis generalizada del continuo como el axioma de elección sean teoremas. Modelo L de conjuntos que denominará construibles porque deben satisfacer, junto a los axiomas de V, un nuevo axioma '$V = L$': «Todo conjunto es construible». En otras palabras, el objetivo de Gödel se centra en tres pasos: 1. Construir L; 2. Demostrar que '$V = L$' se sigue en L; 3. Demostrar que en L tanto la hipótesis generalizada del continuo como el axioma de elección, son teoremas del sistema V + '$V = L$'.

En cuanto al primer punto, Gödel considera las operaciones F_i fundamentales de formar conjuntos —uniones, complementos, pares, productos...—. Con estas operaciones, que son las clásicas, construye todas las clases de conjuntos que se obtienen por iteración transfinita a partir de $\varnothing$. Así, se dirá que un conjunto A es cerrado respecto a una operación F de aridad n si para todos los subconjuntos $A_1, ..., A_n$ de A para los cuales esté definido $F(A_1, ..., A_n)$ se verifica que $F(A_1, ..., A_n) \in A$. Sea X un conjunto de V; D (X) representa el menor conjunto A, $X \subset A$, cerrado respecto a las operaciones F_i fundamentales. Con estas definiciones, el modelo L se construye por iteración transfinita en la forma:

1. $L_0 = \varnothing$
2. $L_{\alpha+1} = \mathcal{P}(L_\alpha) \cap D(L_\alpha \cup \{L_\alpha\})$
3. $L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$
4. $L = \bigcup L_\alpha$

Sin entrar en los detalles o esbozos ni siquiera de la demostración —tanto de la dada en 1938 como la de 1940—, en algunos puntos delicada —como en la discusión de la relativización de V a L y luego a la inversa—, destaco, básicamente, dos puntos:

1. Es claro que cada conjunto $L_{\alpha+1}$-L_α se define sin referencia alguna a la totalidad $L_{\alpha+1}$ a la cual pertenece. Estos conjuntos son los que Gödel, y por este motivo, denomina construibles. El hecho de que se construyan sin referencia a la totalidad a la cual pertenecen indica que la construcción gödeliana satisface las exigencias del predicativismo reclamado por Poincaré, ya que sólo se consideran conjuntos que pueden definirse sin que el definiens remita a totalidad alguna en la cual se encuentre el objeto que se define.

2. Por otro lado, la idea se centra en el manejo de una forma del teorema de Löwenheim-Skolem por el cual se logra la contracción de una familia de conjuntos a unos subconjuntos arbitrarios suyos que constituyen una familia transitiva. Es decir, se logra construir L, con $L \subset V$, de tal manera que, en el caso de ω, el número de subconjuntos de ω, es decir, $2^{\aleph_0}$ sea precisamente $\aleph_1$. Y ello porque se han omitido todos los conjuntos no construibles. La familia transitiva numerable es isomorfa con la dada y, sin embargo, en ella se satisfacen todos los axiomas de V y, además, el de construibilidad '$V = L$'; consecuentemente, se satisfacen todas las propiedades deducibles de ellos. Esta familia es uno de los conjuntos L_α con α numerable y $\alpha \in L_\alpha$. Es claro que la negación de H no puede ser deducible de los axiomas

de V porque tales axiomas se satisfacen en L y la negación de H es, sin embargo, falsa en L.

Estos dos puntos crean, sin embargo, muchos problemas. Si bien es cierto que la construcción es predicativa, la misma no es finitista, hace uso de la iteración transfinita general y no de la reducida, como en Gentzen, a los ordinales menores que ε_0. Por otro lado, no está nada claro si todos los subconjuntos arbitrarios de V son o no construibles; en particular, si lo son o no los subconjuntos de ω. Es decir, el axioma de construibilidad es un axioma realmente problemático, incluso más que la propia conjetura de Cantor. De hecho, el mismo es falso para un conjunto con sólo dos elementos que no sean, a su vez, conjuntos; el conjunto $\{x, y\}$ no es elemento de L_α para cualquier α dado. Esta objeción puede darse, por supuesto, de lado, señalando que es preciso hacer dos usos del término «conjunto»: uno, informal y creador de antinomias, y otro estrictamente técnico, formal. Es lo que afirma Gödel. Y así, en esta teoría, el término «conjunto» debe interpretarse en un sentido técnico absolutamente riguroso y restrictivo: colección de objetos que son conjuntos y que poseen la propiedad transitiva abierta. Pero ello implica, una vez más, y con palabras del mismo Gödel, que «la operación 'conjunto de los x' no puede ser definida satisfactoriamente (en el estado actual de conocimiento al menos), sino sólo parafraseada por otras expresiones que envuelven ya el concepto de conjunto». Por supuesto, el axioma 'V = L' puede ser rechazado. De hecho, el mismo Gödel mostraría sus reservas. Rechazo que significaría la imposibilidad, de momento y hasta que no se encontrara otro axioma menos problemático, de demostrar la independencia de H respecto a los restantes axiomas de la teoría de conjuntos.

Puede volverse ahora al Problema del continuo, al que Gödel dedica un lúcido ensayo en 1947. Ya he indicado que dicho problema no es otro que plantear la cardinalidad del continuo. Y que la única limitación hasta ahora obtenida se centra en el teorema de König, además de que, de resolverse H, se tendría que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. La independencia de H respecto a los demás axiomas de la teoría de conjuntos conduce a replantear el Problema del continuo de modo radical. La independencia de H se obtiene apoyándose en la consistencia de los axiomas de V y en la admisión de 'V = L'. Y dicha consistencia es imposible de obtener. Además, la propia proposición 'V = L' resulta tan indecidible formalmente como la propia proposición H. Y en este punto debe observarse que el problema de la consistencia de P era un problema relativo. Porque si bien al agregar la proposición indecidible a los axiomas de P se obtendría una teoría ampliada tan incompleta como la anterior y, por lo tanto, la teoría se mostraría esencialmente indecidible, tal indecidibilidad dependía básicamente de los métodos demostrativos aceptados. Ampliar tales métodos conducía a una demostración de la consistencia de P. De aquí que pudiera afirmarse que en los terrenos de la Lógica no existieran proposiciones absolutamente indecidibles. Sin embargo, si se aceptan los dos puntos siguientes: a) los métodos de construcción de conjuntos son los establecidos por Cantor y los utilizados como operaciones fundamentales en la demostración gödeliana de la consistencia de H, las operaciones F_i; b) los métodos demostrativos son los conocidos en la Lógica y los conjuntistas —inducción, diagonal, inducción transfinita...—, entonces, resulta que ningún nuevo método se ha originado desde la construcción cantoriana. Ningún nuevo método por el cual se consiga la demostración de la decidibilidad de una proposición como la que refleja el Problema del continuo. En el estado actual del hacer matemático tal problema puede estimarse como problema absolutamente indecidible.

Ahora bien, por paradójico que parezca puede hacerse una pregunta: El Problema del continuo, ¿es, realmente, significativo? Pregunta ante la cual, en principio, sólo caben dos posiciones: Afirmativa, negativa.

Si se acepta como cuestión significativa —y Gödel la aceptó, plenamente— nos encontramos con que la conjetura cantoriana sólo puede ser o demostrable, o refutable o indecidible respecto a los axiomas conocidos. Por lo dicho antes, consecuencia de los trabajos de Gödel y Cohen, se presenta la indecidibilidad absoluta, por ahora, de dicho problema. Sólo la aceptación de un nuevo axioma —como el adoptado por Gödel, el '$V = L$'—, o de un nuevo método demostrativo permitirá resolver la cuestión de la cardinalidad del continuo. Consecuente con su posición realista platónica radical, Gödel, en 1947, sugiere que la posible vía se encuentra en la aceptación de algún nuevo axioma potente. Axioma que puede estar en la línea de algún tipo de infinito alto que asegure la existencia de cardinales inaccesibles. Es vía que, por el momento, no se le muestra muy adecuada. En lo que Gödel acertó, dado que Levy y Solovay, en 1967, demostraron que aun cuando los axiomas usuales se amplíen con distintos tipos de axiomas de cardinal elevado, la hipótesis del continuo permanece indecidible.

En su intento conjetural de resolver el problema, sugiere Gödel la búsqueda de algún otro tipo de axioma. En todo caso, mantiene, en

1964, en notas que agrega a su ensayo de 1947, el papel significativo de la verdad o no del Problema del continuo. Mantiene, a ultranza, su posición realista. Y, consecuente, esta asunción le obliga: Si el matemático sólo describe un mundo eidético de objetos reales que le son independientes, las proposiciones que enuncie han de ser verificables, falsables y, por consiguiente, verdaderas o falsas. De esta forma, la proposición que expresa el problema del continuo ha de ser tan verdadera o falsa como la proposición fáctica: «Hoy, 28 de abril de 1978, hay cincuenta parejas de cigüeñas negras en la provincia española de Cáceres». Y ha de serlo, aunque de momento no tengamos medio alguno de verificarlo o falsarlo. Con una diferencia, que el problema del continuo podrá ser demostrable o refutable si se agrega algún nuevo principio, aún no descubierto por falta de la necesaria intuición lógica. Qué tipo de axioma aceptar vendrá según las consecuencias que del mismo puedan derivarse. En especial, el criterio de falsabilidad ha de tener en cuenta las consecuencias «verificables», es decir, las demostrables sin recurrir al nuevo axioma, pero con demostraciones más simbles —lo cual equivale a olvidar su resultado fundamental sobre las longitudes de las demostraciones, de 1936—. Elegida esta vía, Gödel hace referencia a las consecuencias plausibles y menos plausibles que se derivan de H. Y aunque tenga que reconocer que hay muchas proposiciones plausibles que implican la negación de H, ninguna proposición plausible se ha logrado formular que implique H. A pesar de lo cual estima que el Problema del continuo se centrará, como problema matemático o lógico de fundamentos, en el de crear nuevos axiomas con los cuales pueda hacerse posible refutar la conjetura de Cantor.

Gödel, llevado de su realismo más que platónico, se niega a aceptar que el problema del continuo posea el mismo estatuto que un postulado geométrico como el postulado V de Euclides. En el fondo, se niega a admitir la independencia de dicho postulado respecto a los restantes de la teoría de conjuntos; independencia que posibilitaría la creación de otras teorías en las que se rechace dicha hipótesis y, consecuentemente, dicho problema. Lo cual podría implicar la admisión, como en Poincaré, de cierto tipo de convencionalismo conceptualista, ajeno al realismo gödeliano.

Los argumentos de Gödel para negarse a admitir dicho papel se centran en dos razones. Una, estrictamente matemática: la falta de simetría que se provoca en las teorías que acepten H de aquellas que lo nieguen. Sólo las teorías que aceptan H se le manifiestan como más fructíferas, mientras que aquellas que lo niegan se le muestran estériles salvo para su propio dominio limitado. Asimetría que no ocurre con las teorías geométricas, donde las que aceptan el postulado V y las que lo rechazan son extensiones en el mismo sentido de la palabra. Junto a este argumento «matemático», Gödel aporta un segundo de carácter que él mismo califica de «epistemológico», y que no es otro que la insistencia en el criterio de falsabilidad empírico antes mencionado, aunque dicho criterio no se le muestre como muy factible en el estado presente del conocimiento.

Frente a la posición de Gödel puede adoptarse la posición opuesta en cuanto a la significación del problema del continuo. Hecho que el mismo Gödel reconoce como posición característica de los intuicionistas e, incluso, de algunos constructivistas moderados en la línea de Poincaré y Weyl. Naturalmente, negar significación al problema implica una posición radical si se argumenta desde el plano ontológico de finales del siglo XIX en el que Gödel se mantiene, posición radical que debe rechazar, entonces, no sólo H, sino cualquier otro axioma como los de infinitud potente. En el fondo, debe rechazarse toda la semántica del lenguaje formal conjuntista. Bien entendido, conjuntista cantoriano. Desde un enfoque en el que sea la estructura formal el objeto propio del hacer matemático, no hay verdadero problema. Desde este enfoque, es factible la creación de una nueva semántica conjuntista no cantoriana, de una nueva teoría de conjuntos. Y este hecho es el que intenta poner de relieve la escuela checa ligada a Vopenka con la creación de la AST (*Alternative Set Theory*), en la cual sólo hay dos tipos de potencias infinitas y, además, frente a la concepción cantoriana de situar lo finito tras lo infinito —lo finito como mero rincón de lo infinito—, los conjuntos infinitos se sitúan entre los conjuntos finitos. Como objetivo, y no secundario, la AST se propone modelar de manera natural el concepto de «infinitamente pequeño» que la teoría cantoriana no puede adoptar, salvo la construcción, en parte artificial, de los modelos no canónicos del análisis iniciado por Robinson.

En el fondo, lo que vuelve a plantearse es el problema en cuanto al papel del infinito actual y al papel de las demostraciones no efectivas en el hacer matemático. Con la dificultad de que un rechazo absoluto del infinito actual impide un desarrollo de campos matemáticos que inciden, por otro lado, en terrenos como los de la Física.

En este sentido continúa como problema abierto no ya el problema en sí del continuo, sino la concepción de dicho continuo. Problema abierto porque el intento de captarlo durante el siglo XIX a través de lo discreto mediante la aritmetización del Análisis se mostró inoperante y contradictorio. La inversión epistemológica del último tercio del siglo XIX, con la introducción de las nociones topológicas, pareció el camino adecuado para dominar tal problema. Y, sin embargo, exigió partir del transfinito, punto de partida que, sin embargo, deja sin resolver la cuestión, manifestada en el problema del continuo y la hipótesis del mismo como proposiciones absolutamente indecidibles. Y ello porque en tal transfinito Cantor introdujo, de manera solapada, lo discreto mediante una transposición al concepto de cardinal. Y lo continuo, reflejo de lo geométrico, puede que no necesite, en esencia, de la noción de cardinalidad, lo que pone aún más de relieve el trabajo en el Análisis no canónico donde el «infinitésimo» ha permitido reintroducir la noción de *proximidad* sin tener que pasar la misma por la noción de sucesión o continuo-aritmético ni por la de continuo-conjuntista.

Discreto y continuo que continúan como dos polos entre los cuales se mueve el pensamiento matemático, con predominio alternativo. Y, para mayor homenaje a Gödel, cabe terminar con la afirmación de que sólo un más profundo estudio de lo que ambas cuestiones denotan permitirá, quizá, una aproximación, una mayor clarificación de la concepción del continuo, que puede admitirse como concepción de carácter estrictamente geométrico, al viejo modo.

BARKER, S. F.:
1969. Realism as a Philosophy of Mathematics. In: *Foundations of Mathematics. Symposium papers commemorating the Sixtieth Birthday of Gödel.* pp. 1-9. Springer.
BENACERRAF - PUTNAM (eds.):
1964. *Philosophy of Mathematics.* Blackwell Prentice Hall.
BERNAYS, P.:
1935. Sur le platonisme dans les mathématiques. *L'Enseignement mathématique.* pp. 52-69. Trad. inglesa in Benacerraf-Putnam.
ENDERTON, H. B.:
1973. *A mathematical introduction to Logic.* Academic Press (2.ª ed.).

GÖDEL, Kurt:
1930. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatshefte für Mathematik und Physik 37.* Trad. ingl. in van Heijenoort 582-591.
1930 a. Einige metamathematische Resultate über Entscheidungsdefinitheit und Widerspruchsfreiheit. (Comunicación 23 Oct. de H. Hahn). In van Heijenoort 595-6.
1931. Über formal unentscheidbare Sätze der PM und verwandter Systeme. *Monatshefte für Math. und Physik 38.* Trad. in van Heijenoort 596-616. (Trad. ingl. por Meltzer con introducción de Braithwaite 1962; in Davis (ed.): *The Undecidable* 1965).

1932. Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*. Trad. in Davis: *The Undecidable.*
1932. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalkül. Ibidem.
1943. *On undecidable propositions of formal mathematical systems.* Lectures notes by Kleene y Rosser. Reimpreso in Davis: *The Undecidable.*
1936. Über die Länge von Beweisen. *Ergebnisse eines math. Kolloquiums.* Trad. ingl. in Davis: *The Und.*
1938. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis. Proceedings of the National Academy of Sciences 24.
1940. *The consistency of the continuum hypothesis.* Princeton U. P. 7.ª ed. 1966, con adiciones y notas desde la 2.ª.
1944. Russell's Mathematical Logic. In *The Philosophy of B. Russell,* ed. Schilpp. In Benacerraf - Putnam 211-232.
1947. What is Cantor's continuum problem? *The American mathematical monthly* 54. In Benacerraf - Putnam 258-273, versión revisada y ampliada.

HEYTING, A.:
1955. *Intuitionism. An Introduction.* North - Holland. Trad. española 1976, Tecnos, *Introducción al intuicionismo.*
HILBERT - ACKERMANN:
1928. *Grundzüge der Theoretischen Logic.* Trad. espa. 1962 de la 4.ª ed., *Elementos de Lógica teórica,* Tecnos.

KNEEBONE:
1963. *Mathematical Logic and the Foundations of mathematic.* Van Nostrand.
KOLMOGOROV:
1925. On the principle of excluded middle. In van Heijenoort 414-437.
de LORENZO, Javier:
1974. *La filosofía de la matemática de Poincaré.* Tecnos.
1977. *La matemática y el problema de su historia.* Tecnos.

MONK, J. D.:
1976. *Mathematical Logic.* Springer, GTM 37.
MOSTOWSKI, A.:
1966. *Thirty years of foundational studies.* Oxford, Basil Blackwell.

ROGERS, H.:
1967. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability.* McGraw-Hill.

SIERPINSKI, W.:
1934. *Hypothèse du continu.* 2.ª ed. Chelsea 1956.
SKOLEM, Th.:
1920. Logico-combinatorial investigations in the satisfiability or provability of mathematical propositions: A simplified proof of a theorem by Löwenheim and generalization of the theorem. In van Heijenoort 252-263.
1922. Some remarks on axiomatized set theory. In van Heij. 290-301.
1923. The foundations of elementary arithmetic established by means of the recursive mode of thought, without the use of apparent variables ranging over infinite domains. In van Heij. 302-333.
1952. Consideraciones sobre los fundamentos de la Matemática. *Rev Matema. Hispano-Americana,* XII, pp. 169-200; y XIII, pp. 149-174.

SOCHOR, A.:
1976. The Alternative Set Theory. In *Set theory and Hierarchy Theory. A memorial Tribute to A. Mostowski* (1975). Springer, LNM 537.
van HEIJENOORT (ed.):
1967. *From Frege to Gödel*. Cambridge M., Harvard University Press.

WANG, Hao:
1970. *Logic, computers and sets*. Chelsea.

JAVIER DE LORENZO