Matemática y Crítica

La lectura de la *Crítica* desde un enfoque lo más estrictamente matemático posible ha suscitado en mí un haz de sensaciones encontradas. La ausencia, por no decir desconocimiento, de la Matemática del siglo XVIII, con la única referencia a un hacer geométrico elemental; la impresión de existir tensiones interiores en la obra respecto al papel de la Matemática y de la Lógica para el conocimiento...; sensaciones de incomodidad en la lectura que quizá impidan una valoración objetiva —si es que la misma existe— respecto al papel que la actitud crítica puede representar para la Matemática. Valoración de la concepción crítica, objetivo de lo que sigue.

Enemigo declarado de partir de hechos, Kant parte de unos hechos, de unas creencias. En el terreno aquí delimitado, Kant acepta como hecho la existencia de una ciencia de la razón especulativa: la Matemática pura. Acepta como creencias la necesidad, universalidad, certeza de las proposiciones de dicha ciencia. Y a partir de este hecho, de estas creencias, Kant pretende explicar las notas que predica.

En esta confianza respecto a la Matemática Kant se pone en línea con pensadores anteriores. Desde Platón, se ha confiado siempre en la Matemática, tanto en su coherencia lógica, como en su carácter intuitivo, como en su método. Confianza que ha llevado a adoptar la Matemática bien como propedéutica, en el caso platónico, bien como modelo o arquetipo, en el racionalismo. Y, sin embargo, durante el siglo XVIII la Matemática va a sufrir una serie de ataques que, aun manteniendo la confianza en su certeza, van a centrarse tanto en su coherencia lógica como en su carácter intuitivo.

Respecto a la coherencia lógica corresponde a los empiristas ingleses poner de relieve que la Matemática carece de la misma. Los ataques proceden, fundamentalmente, de Berkeley y van dirigidos a la auténtica Matemática del siglo, el Cálculo infinitesimal. En las Islas ligan el Cálculo a la Geometría pretendiendo una fundamentación de carácter geométrico, pero cometen el error de confundir los incrementos indivisibles —los momentos de Newton— con sus fluxiones, que se refieren a variables continuas; en el Continente ligan el Cálculo a un aspecto fundamentalmente operatorio mediante el manejo de las diferenciales, aunque ello suponga hablar de infinitésimos: cantidades que no son cero pero que tampoco son cantidades finitas. Y Berkeley ataca en 1734 con *The Analyst,* un discurso dirigido al matemático infiel, donde muestra las contradicciones de los matemáticos y la confianza que prestan a cantidades evanescentes que no siendo son, y siendo dejan de ser. No entro en el contenido de la polémica que origina y me limito a mencionar que James Jurin replica el mismo año con "La Geometría, no amiga de la infidelidad"; Berkeley vuelve a la carga en 1735 y ahora es Robins quien contesta.

De una u otra manera entran en la polémica Mac Laurin, Euler, D'Alembert... Mac Laurin en 1742 con su *Tratado de fluxiones* intenta fundamentar el Cálculo en el método de exhaución arquimediano; Euler en 1755 en sus *Institutiones Calculi Differentiales,* da el manejo formal de las diferenciales tal como se usa hoy día, aunque con ello elimina del Cálculo cualquier elemento de carácter geométrico basándolo en el Análisis o álgebra puro. Orientación euleriana seguida por Lagrange, quien en 1772 publica su *Théorie des fonctions analytiques,* cuyo subtítulo indica claramente la línea de pensamiento: Contiene los principales teoremas del cálculo diferencial sin el uso de los infinitamente pequeños, o cantidades evanescentes, o límites o fluxiones y todo se reduce al arte del análisis algebraico de cantidades finitas. Es el intento de reducir el Cálculo al Análisis o Algebra, bien entendido que en aquel momento el Algebra comprende no sólo las operaciones aritméticas, sino la teoría de funciones con derivadas y el uso de los desarrollos en serie de potencias... Algebra que comprende "los verdaderos principios y, por así decir, la metafísica..." Línea a la que Carnot intentará replicar con sus *Reflexiones sobre la metafísica del cálculo infinitesimal,* pero ya en 1797.

No se pueden olvidar los intentos de D'Alembert de precisar las nociones que entran en juego, precisar alguno de los conceptos que se manejan y que nadie ha definido con rigor; porque, nota característica de la Matemática del XVIII es precisamente la ausencia de rigor y precisión en las definiciones y en los principios o postulados de los que se parte. D'Alembert, ante las críticas de Berkeley, ante los resultados a veces acertados, a veces no, que se obtienen con las series, ante resultados aún más sorpredentes con las divergentes, que carecen de cualquier interpretación..., pretende buscar los principios básicos del hacer matemático, determinar la verdadera metafísica de la Matemática. Y en los artículos *Diferencial* y *Límite* que publica en la Enciclopedia, considera que el Cálculo no es otra cosa que un método de límites, mientras que "la teoría de límites es la verdadera metafísica del cálculo... No se trata de cantidades infinitesimales, sino de límites de cantidades finitas...". No trata la Matemática con objetos, sino con relaciones entre objetos, viene a decir. Los infinitesimales no son más que formas de hablar que permiten hacer más breve la descripción del empleo de los límites. Pero D'Alembert no consigue dar una exposición formal y continúa empleando la vaguedad de las interpretaciones geométricas, como cuando señala que la tangente a una curva es el límite de las secantes cuando los dos puntos de ésta tienden a confundirse... Ausencia de coherencia lógica, denunciada por los empiristas y mantenida, también, por los propios matemáticos que terminan por hacer lo que Voltaire resumió muy brillantemente: El cálculo es "el arte de numerar y medir exactamente una Cosa cuya Existencia no puede ser concebida".

Si la ausencia de coherencia lógica en el hacer matemático no era asunto desconocido para el público filosófico —al menos para los empiristas ingleses, para los Ilustrados franceses—, tampoco lo era el proceso quizá más sutil que ya he apuntado: el predominio del carácter operacional de la Matemática en perjuicio de la representación geométrica. Carácter operatorio que lleva a Lagrange a afirmar en su *Mecánica Analítica*: "No se encontrarán figuras en esta obra. Los métodos que aquí expongo no requieren ni imágenes ni razonamientos geométricos o mecánicos, sino tan sólo operaciones algebraicas sujetas a un progreso regular y uniforme". La obra de Lagrange es de 1788, pero culmina un proceso de descrédito de la intuición sensible que se va manifestando a lo largo del siglo entre los matemáticos. Me basta mencionar, junto a lo ya indicado de la imposibilidad intuitivo-geométrica de las series, los problemas que suscitan los negativos, que llegan a aceptarse porque lo imponen las reglas algebraicas "aunque ninguna idea se ligue a esas cantidades", como dirá D'Alembert; o los complejos considerados como *imposibles,* y que Euler llama 'imaginarios' porque proceden de la imaginación, y que a pesar de su imposibilidad tienen que manejarse porque, como había indicado Girard un siglo antes, dan certidumbre a la regla general, hacen imposible que existan otras soluciones y porque son útiles. Los complejos no hay forma de interpretarlos geométricamente, hasta la llegada de Argand, Gauss...

La propia geometría se desarrolla desde un enfoque algebraico y no es más que un lenguaje que cubre los procesos y construcciones de naturaleza puramente algebraica; por ejemplo, Euler maneja las ecuaciones de segundo grado con tres incógnitas que no son otra cosa que las superficies. El lenguaje geométrico como investidura de la noción, muy confusa, de función, de las ecuaciones algebraicas. Terrenos donde la intuición geométrica se va volviendo impotente, incluso en los considerados geométricos puros, como cuando Stirling, en 1717, habla de una curva que posee un "punto doble imaginario en el infinito". Ausencia de interpretación geométrica o intuitiva sensible que conduce a los matemáticos a la búsqueda de una metafísica, de unos principios reguladores alejados de lo geométrico y que sean los del pensamiento puro mediante el establecimiento de 'operaciones 'sometidas a unas reglas uniformes y seguras.

En este sentido Kant parece injusto al decir que los matemáticos, los de su época, se despreocupan de la metafísica de su disciplina y construyen en el aire o en la arena... Por otro lado, Kant se limita a la Geometría euclídea y al cálculo aritmético —incluso todavía en 1764 hace la distinción de que, al recurrir a la aritmética, lo hace tanto a la de números como a la aritmética universal, entendiendo por ésta el álgebra elemental, época en la cual acepta un radical formalismo sobre símbolos con olvido de las cosas significadas—

sin referencia alguna a los problemas centrales de la Matemática del siglo XVIII, problemas que se relacionaban con el Cálculo o Análisis matemático. Problemas que llevaron a los matemáticos de la época a: a) Mantener la diferencia arquimediana entre los procesos de descubrimiento y los de exposición; b) Potenciar el carácter operatorio y formal de la Matemática; c) Descartar el método axiomático por imposible de aplicar allí donde las primeras nociones eran confusas y carecían de definición, al igual que estaban ausentes postulados primeros de cualquier tipo; d) Dudar de la 'evidencia' atribuida a las primeras nociones que carecían radicalmente de cualquier interpretación geométrica.

A pesar de estas diferencias, Kant se plantea el mismo problema de búsqueda de fundamentos, de búsqueda de principios o metafísica propia de la Matemática, pero, no matemático profesional, Kant va a aceptar el carácter intuitivo, representacional, de la Matemática, así como la certeza de sus proposiciones y la seguridad de su método. Sin embargo, va a apuntar un problema por vez primera entre los filósofos: el de las barreras o limitaciones de la Matemática; quiero decir, va a aceptar las notas de universalidad, necesidad, certeza, evidencia, pero se va a oponer a que la Matemática sea modelo o propedéutica. Como novedad, Kant plantea la cuestión de las limitaciones externas de la Matemática. Novedad relativa, ciertamente, porque ya durante el siglo XVIII se habían alzado voces contra el desarrollo ilimitado de la Matemática, y no me refiero sólo a Diderot cuando en 1754 señala que a finales de siglo no quedarán más de tres o cuatro matemáticos, sino que es la opinión de Euler, Lagrange, D'Alembert quienes en 1781, precisamente, en su correspondencia, indican la necesidad de que aparezcan nuevas vetas o filones o, de lo contrario, la Matemática quedará estancada, en su propio desarrollo interior, no digamos respecto a su aplicación a otras disciplinas como la Biología o la Química —son las dos señaladas por Lagrange, en concreto—. Tampoco faltan voces, como la de Condorcet, también en 1781, anunciando la aparición de una nueva era de esplendor matemático, aunque en línea diferente a la seguida en el siglo XVIII, de mayor abstracción y pureza, con menor aplicabilidad a otras ciencias y menor preocupación por los métodos de cálculo; Condorcet parece anunciar la inversión producida en los primeros años del siglo XIX bajo el lema de reemplazar el cálculo por las ideas, jugando por supuesto con los dos sentidos del término 'cálculo'. Limitaciones sentidas y anunciadas por los propios matemáticos, aunque sea Kant quien en el terreno filosófico se haga eco de las mismas.

Esbozado brevísimamente un cuadro del XVIII y la actitud primera kantiana respecto a la Matemática, paso a una exposición algo más amplia de la Matemática y la actitud crítica y en el orden: Cuál es la Metafísica de la Matemática, es decir, cuáles son los principios que aseguran su certeza, universalidad y necesidad; cuál es el método y, finalmente y como resumen, cuáles son los límites que la posición crítica impone a la Matemática.

I. METAFISICA

La búsqueda de unos principios que den cuenta de la certeza, universalidad y necesidad de la Matemática se liga en Kant, de modo estrecho, a su epistemología —hasta el punto de provocar la sensación de que ha sido la atribución de estas notas a la Matemática la que ha condicionado dicha epistemología, un dar cuenta del hacer geométrico euclídeo como aparece en *Elementos,* hacer luego ligado a los restantes tipos de conocimiento—. Posición epistemológica que cabría resumir afirmando que Kant sostiene un apriorismo constructivista perceptivo. Aunque también en esbozo, es preciso dar una idea de dicha posición epistemológica kantiana.

a) El análisis trascendental kantiano sostiene que en el conocimiento se presentan dos factores: El concepto, por el cual se piensa un objeto; la intuición a través de la cual es dado el objeto. Factores que proceden de dos troncos separados: la sensibilidad, el entendimiento, que pueden tener un origen común, aunque desconocido.

Insiste Kant, reiteradamente, en que el conocimiento exige los dos factores citados. "*El entendimiento* y la *sensibilidad* que nosotros poseemos sólo pueden determinar objetos si actúan *conjuntamente*" (A 258; B 314) (*). Se pueden pensar, ciertamente, concep-

(*) Las citas de la *Crítica de la razón pura* son de la traducción de P. Ribas (Alfaguara 1978); las de *Prolegómenos,* de la versión de J. Besteiro (Aguilar).

tos pero los mismos son vacíos —"el concepto quedaría privado de *sentido* (según se dice), esto es, privado de significación" (A 240; B 299)— si carecen de objeto, aunque los conceptos pensados no sean contradictorios; sólo ese pensamiento se convierte en conocimiento en cuanto se relacione con objetos dados por la intuición, sea empírica o pura, pero siempre que dichos objetos puedan darse atendiendo a las condiciones formales que les sean propias en esa intuición —el ejemplo empírico en el caso de la ciencia, el objeto construido bajo las formas puras del espacio y tiempo en el caso de la Matemática—. "De lo contrario, los conceptos son vacíos y aunque hayamos pensado por medio de ellos, nada hemos conocido a través de tal pensamiento: no hemos hecho, en realidad, más que jugar con representaciones" (A 155; B 195). Incluso en el caso de la intuición pura, el conocimiento sólo es factible en la medida en que dichas intuiciones puras puedan representarse mediante intuiciones empíricas, conformadas por la sensibilidad. Y de aquí que en geometría se tengan que hacer figuras que "constituyen para los sentidos un fenómeno presente (a pesar de ser producido a priori)", y en aritmética se tenga el soporte de los números "en los dedos, en los corales del ábaco o en las rayas y los puntos que se presentan a la vista" (A 240; B 299). Por simetría, con la mera percepción no se obtiene conocimiento alguno, porque esa percepción es siempre de algo particular y concreto, de algo singular que carece de las notas de universalidad y certeza, de la necesidad que ha de poseer todo conocimiento; la mera repetición o el torrente de fenómenos no vendría regulado por leyes universales y necesarias y se tendría "una intuición sin pensamiento, pero nunca un conocimiento" (A 111).

Distingue Kant, en su análisis de una acción conjunta: a) las condiciones del pensar en una experiencia posible —condiciones del pensamiento— que son los conceptos a priori, las categorías; b) las condiciones de la intuición en una experiencia posible —condiciones de la sensibilidad— que son las formas puras de dicha sensibilidad: el espacio y el tiempo. Condiciones a priori de la experiencia posible que son, a la vez, "condiciones de posibilidad de los objetos de experiencia" (A 111), mientras que las categorías constituyen los conceptos básicos "para pensar objetos en general en relación con los fenómenos" (id.).

Pero esos dos factores no pueden darse aisladamente, sino que en el momento del conocer, para que este conocimiento posea realidad objetiva, han de ponerse en relación entre sí. Sólo habrá conocimiento objetivo cuando el concepto se refiera a un objeto y éste sea posible de alguna manera. En otras palabras, sólo habrá conocimiento cuando se produzca una síntesis, un acto de enlazar lo universal y necesario de lo conceptual con la representación particular, aún más, singular, aportada por la sensibilidad. Los objetos únicamente pueden darse por la modificación de la sensibilidad gracias a las representaciones. Y la síntesis de las representaciones se basa en la imaginación —facultad de representar un objeto en la intuición, incluso no estando presente el objeto— mientras que la unidad sintética se hace gracias a la unidad de apercepción. Las representaciones corresponden al sentido interno y, fundamentalmente, a la forma a priori del mismo, el tiempo. De aquí que sea un acto de síntesis —que lo es del entendimiento— de lo diverso en la unidad de apercepción lo que establece la facultad del conocer objetivo, es decir, la relación determinante de una representación con su objeto. En el proceso del conocer objetivo distingue Kant: la *síntesis del entendimiento* —que, independiente de la sensibilidad, determina a la variedad que afecte a la misma según la forma de la intuición; la *apercepción* y su unidad sintética —como fuente de toda combinación, se refiere por un lado a la diversidad de las intuiciones en general, y por otro lado, bajo el nombre de categoría, a objetos en general; el *sentido interno* —que contiene la mera forma de la intuición. Es el enlace activo de estas tres componentes por el sujeto la que posibilita el conocer objetivo.

Los elementos anteriores van a intervenir en el acto de síntesis. Ahora bien, son aspectos de dos troncos separados en un mismo sujeto, troncos que establecen las condiciones de la sensibilidad y del entendimiento. Y ambos muestran una heterogeneidad que, para Kant, obliga a admitir la necesidad de "un tercer término que sea homogéneo con la categoría, por una parte, y con el fenómeno, por otra, un término que haga posible aplicar la primera al segundo" (A 138; B 177). Insisto, entre lo universal y lo singular, entre el concepto y la intuición, existe para Kant una heterogeneidad que ni siquiera el acto de síntesis que pertenece al campo del entendimiento parece salvar, ni la unidad sintética de la conciencia parece eliminar. Unidad sintética que es, ciertamente, la condición objetiva de todo conocimiento. Unidad sintética que requiere de un acto del entendimiento, porque el hombre no posee más intuición que la sensible, de lo contrario ni siquiera se planterían los problemas del conocimiento.

Al no tener más intuición que la sensible, tiene que realizar un discurso —en el plano del entendimiento puro— o una intuición —en el plano de la sensibilidad—; en cualquier caso requiere del tiempo para el acto de síntesis. Y es este tiempo, como forma a priori de la sensibilidad, el que permite establecer el tercer término, el enlace entre la sensibilidad y el entendimiento. El tiempo, condición formal de la diversidad del sentido interno es tal que "guarda homogeneidad con la *categoría* (...) en la medida en que es *universal* y en que está basada en una regla a priori. Y es igualmente homogéneo con el *fenómeno* en la medida en que el tiempo se halla contenido en toda representación empírica de la diversidad" (id.). La mediación va a venir dada por lo que Kant llama *esquema trascendental* que es una "representación de un procedimiento universal de la imaginación para suministrar a un concepto su propia imagen" (A 140; B 179). Distingue Kant, para delimitar este término, la imagen como producto de la capacidad empírica de la imaginación productiva, que es singular, del esquema como producto de la facultad imaginativa pura a priori. Gracias al esquema, la imaginación provee una imagen para un concepto, imagen que por supuesto no coincide con el concepto. Por el contrario, "los conceptos puros sensibles no reposan sobre imágenes, sino sobre esquemas" (A 140; B 180), con lo cual los esquemas limitan la aplicación de las categorías a las condiciones que residen fuera del entendimiento, es decir, a las condiciones de sensibilidad.

En otras palabras, para Kant existe la necesidad de un acto sintético en el tiempo bajo las condiciones del entendimiento y de la sensibilidad. Acto sintético que requiere de esquemas, de procedimientos o reglas universales de representación dadas por la imaginación pura que o bien produzcan la imagen singular, o bien enlacen dicha imagen de lo intuido con el concepto universal del entendimiento.

Es la teoría del esquema lo que va a permitir dotar de un carácter constructivo a la Matemática y ello a priori, porque la Matemática quedará construida por la imaginación sola en la intuición pura, proceso de construcción desde el esquema, con su imagen, hasta el concepto; es decir, el matemático va a dar primero el esquema con su imagen y, después, el concepto que le corresponda. El conocimiento objetivo queda, así, perfectamente asegurado. Construcción de lo singular, la imagen viene determinada por las condiciones formales de la sensibilidad que darán, por un lado, lo ostensivo o geométrico, por otro, lo simbólico de la magnitud en lo temporal. Acción constructiva en el tiempo porque, como precisará en la edición B: "No podemos pensar una línea sin *trazarla* en el pensamiento, ni un círculo sin *describirlo,* como tampoco representar tres dimensiones del espacio sin *construir* tres líneas perpendiculares a partir del mismo punto. Ni siquiera podemos pensar el tiempo sino gracias a que, al *trazar* una línea recta (que ha de ser la representación externa y figurada del tiempo)..." (B 154).

De esta forma surge, precisamente, el *número,* como "esquema puro de la magnitud (*quantitas*), entendida como concepto del entendimiento", número que no va a ser otra cosa que la "representación que comprende la sucesiva adición de unidades homogéneas" (A 142; B 182). Número que no es otra cosa que la unidad de síntesis de lo diverso de una intuición homogénea en general, unidad obtenida al producir el sujeto el tiempo mismo en la aprehensión de esa intuición. De modo análogo el espacio no será otra cosa que la imagen pura de todas las magnitudes (*quanta*) bajo las condiciones de una representación de carácter universal.

Aunque Kant no pueda pensar en Geometría sin tener que trazar, describir, construir..., términos que aclaran nítidamente su actitud mecanicista ante la Matemática, conviene indicar que en su teoría del esquematismo pone dos ejemplos aún más aclaratorios, uno de Aritmética y otro de Geometría. Indica, "si escribo cinco puntos seguidos ..... tengo una imagen del número cinco", pero esto es mera imagen, no el concepto de número. Para alcanzar tal concepto, lo importante es el dato de esa *sucesiva adición de unidades homogé-*

neas; en otras palabras, la posibilidad de ir agregando un punto más, una unidad más. (En términos de Poincaré: la posibilidad de reiterar un acto desde que el mismo se ha hecho posible una vez). La representación de esa reiteración es, precisamente, la clave del número. Representación que, en cada caso concreto, exige de un acto de la intuición sensible para llevarlo a cabo: un contar con los dedos, con el ábaco, con signos gráficos... Actos de síntesis subyacente a los juicios sintéticos a priori de la Aritmética, porque '5+7' supone la sucesiva adición de unidades homogéneas hasta el cinco y luego reiterar la acción con siete puntos más y obtener, así, '12'; que, por supuesto, no está contenido en el acto de adición ni en los números cinco o siete. Esa posibilidad permite alcanzar la universalidad del concepto, gracias a la regla para construir cualquier número, regla que es anterior a cualquier experiencia.

La misma clave posibilita la geometría. En el ejemplo geométrico, Kant adopta el triángulo, al que volverá reiteradamente. La imagen del concepto 'triángulo' es algo singular, concreto, con unas magnitudes y formas dadas que impiden hablar del triángulo y no a 'un' triángulo rectángulo, escaleno... La universalidad se salva, según Kant, mediante el esquema: "El esquema del triángulo no puede existir más que en el pensamiento, y significa una regla de síntesis de la imaginación respecto de figuras puras en el espacio" (A 141; B 180). Si no interpreto mal a Kant, equivale a decir que la imagen viene trazada mediante un procedimiento o regla que es universal, importando básicamente esta regla, ya que cualquier triángulo que se trace de acuerdo con ella ha de verificarla; regla que podría indicarse como la de dibujar tres rectas que se corten dos a dos. Regla por la cual se produce la imagen singular y que, sin embargo, comprende en su posibilidad la infinidad de imágenes que pueden caer bajo el concepto y en todas sus magnitudes y formas. Regla que, aunque posibilita la experiencia, no procede de la misma.

Enlazar la intuición pura, siempre singular, con el concepto puro siempre universal, a través del acto de representación de un procedimiento que cae bajo el entendimiento —y por tanto es a priori—, a través del esquema, creo que es lo que permite afirmar el carácter constructivo a priori de la solución kantiana a la metafísica matemática, a la fundamentación de la misma. Carácter constructivo que se refleja en que los juicios de la matemática han de ser sintéticos a priori, por no ser más que actos de síntesis mediante reglas universales y que son anteriores a cualquier experiencia, pero que vienen determinados por las condiciones en que dicha experiencia puede realizarse, condiciones también a priori en la Matemática y que son las formas puras de espacio y tiempo. Anteriores tanto en el aspecto lógico —por su necesidad— como en el cronológico —sólo puede manifestarse el a priori en el momento de la experiencia y nunca antes o después—.

Si el carácter constructivo de la Matemática se concreta en los juicios sintéticos a priori, la posible arbitrariedad de la construcción matemática —por ser anterior a toda experiencia— viene regulada por el principio supremo de dichos juicios, que Kant formula en los términos: "el principio supremo de todos los juicios sintéticos (a priori) consiste en que todo objeto se halla sometido a las condiciones necesarias de la unidad que sintetiza en una experiencia posible lo diverso de la intuición" (A 158; B 197). En otras palabras, sólo hay conocimiento objetivo cuando se enlazan las condiciones formales de la intuición a priori, la síntesis de la imaginación y la necesaria unidad de esta última síntesis en una apercepción trascendental. Es principio que puede estimarse como de limitación del conocimiento por indicar las condiciones en las cuales dicho conocimiento no existe, cuando se queda en mero concepto con representaciones sin objeto o en meras intuiciones carentes de la unidad que permita la síntesis conceptual de los fenómenos en general.

Es solución constructivista que permite decir, reiterar a Kant que el conocimiento matemático sólo considera "lo universal en lo particular, e incluso en lo singular, pero a priori y por medio de la razón" (A 714; B 742), porque el singular se halla determinado por las condiciones universales de la construcción, siendo el objeto para el concepto como su esquema; de aquí que dicho concepto deba concebirse como universalmente determinado. Pero si dar un objeto, definirlo es, en Matemática, lo mismo que construirlo, Kant precisa que esa construcción es una "representación universal" (A 713; B 741).

Si bien la Matemática es una construcción, un uso de la razón pura, la misma presenta para Kant una inflexión, porque la hace tener como objetivos: "determinar una intuición a priori en el espacio (figura); dividir el tiempo (duración); conocer simplemente el elemento universal de la síntesis de una misma cosa en el espacio y en el tiempo, así como la magnitud a que ello da lugar en una intuición en general (número)" (A 724; B 752). Queda, a un lado, el investigar de dónde proceden los conceptos de espacio y tiempo, el origen de los conceptos puros del entendimiento, el alcance de la aplicación de la Matemática, porque según Kant a los matemáticos "Lo único que les importa es servirse de ellos" (A 725; B 753). Temas que son, para Kant, propios del filósofo. El constructivismo kantiano termina, de este modo, en mera razón instrumental, utilitaria. La construcción matemática, en el fondo, no se realiza más que en función de un conocimiento científico-natural.

b) La solución kantiana a un problema, a un viejo problema del fundamento epistemológico de la Matemática me parece, de entrada, un tanto forzada. Queda en el aire el por qué introducir el término medio 'esquema', como no sea para la descripción de lo que, en la práctica, realiza el matemático. Pero una descripción no aporta ni una explicación de fundamentos ni, lo más importante, funda realmente el sistema proporcionándole la garantía de su validez, certeza... El propio Kant afirma: "En relación con los fenómenos y con la mera forma de éstos, el esquematismo del entendimiento constituye un arte oculto en lo profundo del alma humana. El verdadero funcionamiento de este arte difícilmente lo pondremos al descubierto" (A 141; B 180).

Y cuando digo que parece limitarse a describir lo que hace el matemático es porque aquí se tiene la referencia a un viejo problema de la fundamentación de esta ciencia: desde al menos Euclides, cuando en Matemáticas se habla de algún tema siempre se empieza particularizando, se sigue empleando la 'maquinaria' y se termina generalizando. Para seguir con el triángulo kantiano, se comienza con un "sea un triángulo..." y se dibuja o se traza mentalmente dicho triángulo. Por supuesto se razona sobre esta figura, sobre esta imagen singular pero la validez de lo razonado se quiere que sea universal, independiente de los elementos concretos de la figura trazada. En este proceso constructivo matemático —y me adelanto al apartado del método— se tienen, aquí, y de acuerdo con Beth, dos problemas: a) Por qué se hace intervenir un objeto singular —en este caso, la figura o imagen del triángulo—; b) Cómo dar lugar a una conclusión universal utilizando dicha base singular. Han sido dos cuestiones involucradas y muy ampliamente debatidas en relación, concretamente, con el triángulo. Descartes sostenía que la necesidad de hacer intervenir la figura concreta se debe a que la misma permite poner en marcha la intuición dado que ésta se refiere a sólo objetos singulares. En cuanto a la parte b) Descartes introduce la noción 'esencia del triángulo' y afirma que la conclusión es válida porque lo que se hace es razonar sobre dicha esencia. Locke rechaza la existencia de tal esencia y la sustituye por la idea 'triángulo general'. Y Berkeley niega ambas nociones llegando a la solución respecto a b) de que en realidad en el razonamiento no se hace intervenir ninguno de los caracteres propios de la figura concreta, por lo cual es posible dicha generalización.

En este ámbito, la respuesta kantiana se hace a las dos cuestiones: respecto a la primera, aceptando íntegramente la posición cartesiana; respecto a la segunda, señalando que lo que importa no es el triángulo dibujado, la imagen concreta, sino el esquema, la regla que posibilita dicha imagen; es decir, el proceso constructivo por el cual se realiza el triángulo singular dibujado y que es válido para cualquier imagen, regla que permite la universalidad de los razonamientos que puedan realizarse sobre dicha figura. (Este hecho no siempre se ha visto bien interpretado, como en el caso de Beth ya citado quien interpreta la frase "el triángulo construido por la imaginación sola en la intuición pura" como si Kant quisiera decir que se razona no ya sobre un triángulo sin espesor o color..., sino que parece postular un "triángulo que ni es escaleno, ni rectángulo, etc., lo que es incompatible con los hechos psicológicos elementales" p. 13). Para Kant la imagen es, ciertamente, concreta, pero la regla con la cual se trata esa imagen es la que posee la universalidad y generalidad y viene dada por las condiciones de nuestra intuición, porque es en la forma de tal intuición en la que encuentra la posibilidad de dicha construcción y, según Kant, consecuentemente la posibilidad de los objetos de la experiencia. Es en dicha forma a priori en la cual dicha regla siempre permite la construcción de un triángulo: que tres rectas se corten dos a dos.

La solución kantiana se encuentra de acuerdo con la Geometría métrica elemental tanto en la fase de descubrimiento como en la exposición que de las proporciones geométricas hace Euclides en *Elementos*. Pero es solución que se muestra insatisfactoria por varios puntos. Me voy a limitar a los siguientes:

1. Olvida que, junto a una fase de descubrimiento, intuitiva y constructiva, existe una fase de exposición, de carácter demostrativo, lógico. Y esta fase posee un fundamento estrictamente deductivo-lógico en muchos de los procesos del hacer matemático. Fases ya claramente delimitadas por Arquímedes y asumidas por matemáticos como Fermat, Barrow, Pascal... Fase con esquema lógico que da cuenta de los pasos de particularización, maquinaria y generalización antes mencionados. Esquema que podría esbozarse como sigue: Se quiere demostrar que todo triángulo T posee la propiedad P. Se empieza adoptando como hipótesis T; en las líneas siguientes se van estableciendo las proposiciones producidas por la maquinaria en base a los postulados o a proposiciones ya demostradas, líneas que culminan en P. Se agrega la línea T → P, y se generalizan las variables libres que intervienen tanto en T como en P quedando la proposición demostrada (x) (T → P). Este esquema lógico es válido para el tipo de razonamiento señalado y también cuando es imposible la admisión de cualquier tipo de imagen singular; basta decir, 'sea un elemento...'. No requiere intuición perceptiva ni constructivismo alguno. Por supuesto requiere del signo, como se requiere del lenguaje para la comunicación y el propio pensamiento.

2. La solución kantiana se limita, en realidad, a la Geometría elemental en su aspecto heurístico, y ello porque exige del esquema con fenómeno sensible, con construcción o trazado de figura. En Aritmética intenta soslayar el hecho de la ausencia de imagen ligándose a cierto operacionalismo, pero también elemental, y siempre con la manipulación o representación de signos que sustituyan a las magnitudes representadas. La imagen, aquí, ha desaparecido. Y el carácter restrictivo se pone aún más de relieve en los procesos de límite y de convergencia de funciones y series donde la intuición perceptiva está radicalmente ausente. Y por supuesto en la afirma-

ción geométrica de Stirling de 1717 ya mencionada... Construcción de objeto que impediría cualquier avance del pensamiento matemático en el cual, en lugar de objeto, se manejan relaciones entre objetos y tales relaciones ya son irrepresentables como figuras salvo en una aceptación estrictamente convencional.

3. La limitación a la Aritmética y Geometría elementales impide a Kant tener en cuenta la verdadera marcha del trabajador matemático, y no sólo en cuanto a su manejo de relaciones y no de objetos. He intentado mostrar cómo se trabajaba en su época. Los conceptos carecían de precisión. En el fondo, el matemático no partía de la definición de los objetos con los cuales trabajaba, ni estipulaba los postulados de entrada, sino que a partir de alguna 'idea' general conjeturaba, adelantaba proposiciones intentando demostrarlas y, mediante contraejemplos —que en ocasiones muestran una total imposibilidad de ser construidos intuitivamente— va delimitando los campos de validez de los objetos de partida; es decir, va realizando procesos tanto de análisis como de síntesis. Por supuesto, esto es válido fundamentalmente para la fase de descubrimiento de la Matemática viva de la época, de todas las épocas y pudiera argumentarse que Kant hacía referencia exclusivamente a la fase de exposición de una materia ya lograda de manera definitiva.

Es olvidar entonces que cualquier intento de fundamentación de una disciplina debe serlo de esa disciplina y no de los restos arqueológicos de la misma. En segundo lugar, sería olvidar la afirmación kantiana en la universalidad, certeza de las proposiciones matemáticas, válidas para todo tiempo y lugar. Afirmaciones referidas a una Matemática que estima en vivo. Y así sostiene que el matemático parte de las definiciones de sus objetos. Llega a decir, "No quedan, pues, otros conceptos susceptibles de definición que los que contienen una síntesis arbitraria que puede construirse a priori, y, por consiguiente, *sólo las matemáticas contienen definiciones*" (A 729, B 757, subr. mío), porque son las únicas que producen el concepto, lo construyen y no lo explican, ni describen ni muestran ostentivamente. Poco antes, ante las críticas de filósofos como Berkeley, de algunos pensadores ilustrados, del propio hacer matemático con sus ausencias de rigor, de definiciones precisas, d'Alembert acuñaría la frase:

"Seguid, la fe vendrá después". Aunque para d'Alembert la búsqueda de la demostración constituya una labor fundamental del matemático, su actitud de matemático profesional se contrapone, radicalmente, a lo pretendido por Kant.

4. Kant parece desconocer el papel del lenguaje en la actitud matemática. No sólo se construyen objetos figuralmente en la intuición sensible; de lo contrario, los matemáticos del siglo XVIII no hubieran podido entrar en juego con las nociones no definidas de función, número complejo, límite... También la aproximación mediante el lenguaje permite una elaboración y una acción matemática, y la importancia del lenguaje bien escogido ya había sido puesta de relieve por Descartes. La misma imprecisión manifestada en torno a las definiciones obliga a la búsqueda de rigor, al análisis lingüístico conceptual. Importancia del lenguaje matemático manifestada por un constructivista como Poincaré al señalar que la propia creación matemática podría estimarse como el arte de dar el mismo nombre a ideas diferentes. Y aunque un Brouwer niegue la importancia del lenguaje para la Matemática llegando a afirmar que el pensamiento matemático es inexpresable, al tener que comunicar su pensamiento matemático Brouwer fue paulatinamente aceptando dicha importancia, al igual que en contrapartida, el primer formalismo estrictamente sintáctico fue moderando sus posiciones para asumir un constructivismo en dicho pensamiento.

5. Creo que he potenciado, en mi interpretación de las ideas kantianas sobre la matemática, el aspecto constructivo, además del intuitivo perceptivo. Logicistas y neopositivistas se han limitado a considerar la distinción kantiana de los juicios sintéticos, a prori o no, y analíticos en un contexto más puramente lógico-deductivo. Es interpretación la más divulgada y ciertamente los textos kantianos permiten sostener mucho más cómodamente esta interpretación y no sólo en base a la Introducción a la Segunda edición y a *Prolegómenos*. Sin embargo, creo más consecuente mi acepción constructivista. Es la asumida por las diversas tendencias constructivistas, como la de Poincaré —al que he hecho referencia en cuanto al principio de reiteración de una acción desde que la misma es posible—, formalistas como Hilbert, intuicionistas como Brouwer y, actualmen-

te, la escuela de Erlangen representada por Lorenzen y Lorenz. Pero hay que precisar, si esta interpretación se lleva al grado de los matemáticos citados anteriormente. Porque, de hecho, si se lleva a ese grado, el constructivismo matemático constituye una extrapolación tal que resulta contrario a las ideas sostenidas por Kant. Para éste, si hay construccionismo lo hay ligado siempre a una etapa perceptiva, de intuición sensible. Y de ahí que su constructivismo se encuentre sometido a la representación sensible de los objetos, de las figuras —sean geométricas o numéricas—. Y si ya este enlace chocaba con el hacer matemático del siglo XVIII, mucho más con el hacer matemático posterior que se centró en el manejo de curvas teratológicas en el Análisis, los espacios y variedades n-dimensionales, el infinito actual... y no digamos con el hacer matemático de estructuras formales... Aún más, es totalmente contrario a la propia Geometría métrica euclídea a pesar de sus permanentes llamadas a la misma porque, aunque algún kantiano sostenga lo contrario, es imposible la representación en imagen singular del paralelismo de dos rectas en el plano euclídeo.

El aspecto intuitivo-perceptivo de la solución kantiana ha sido muy debatido y criticado, por lo que no voy a entrar en él. Me basta indicar que, de hecho, todos los autores constructivistas mencionados rechazan la interpretación kantiana de la geometría. La intuición geométrica falla, no puede penetrar en espacios n-dimensionales, en la elaboración de las demostraciones geométricas pueden hacer falta reglas que exijan una infinidad de pasos... Y en este punto indicaría tan sólo que entre los mayores críticos de la solución geométrica kantiana se han encontrado, precisamente, los intuicionistas, como Poincaré y Brouwer, al igual que ha sido éste quien ha puesto de relieve el papel esencial que posee el proceso lógico-deductivo incluso a niveles muy elementales. Sólo permanece un constructivismo finitista para la Aritmética en sus primeras etapas. Finitismo que pretende mantener la escuela de Erlangen actualmente, en su acepción intuitiva sensible con la contradicción de tener que admitir, como Lorenz, la inducción transfinita para llegar a justificar dicho finitismo; inducción transfinita que supone un elemento antiintuitivo por excelencia.

El constructivismo finitista perceptivo kantiano cabría aceptarlo desde un enfoque de epistemología genética, pero que también se vuelve antikantiana por negarse a aceptar los apriorismos cronológicos y de nivel o de constitución del sujeto. Lo que sí cabe admitir, con Poincaré y Hilbert, es un constructivismo no perceptivo sino operatorio y regulado por las ideas en el sentido de Kant, ideas como elementos reguladores de la construcción y que conlleven el manejo no sólo de figuras y números, sino de relaciones y de estructuras. Así, Hilbert coloca como lema de su obra *Fundamentos de la Geometría,* donde maneja geometrías tan antiperceptivas como las no-arquimedianas, las palabras de Kant: "Así, pues, todo conocimiento humano comienza con intuiciones, de éstas pasa a conceptos y termina con ideas". Pero esta admisión tampoco puede ser kantiana, porque para Kant lo que carezca de representación sensible, de objeto, no es conocimiento sino mero pensamiento que se hace la ilusión de conocer. Kant se mantenía muy ligado al criterio de verdad como correspondencia y todo lo que pudiera 'pensar' un sujeto, si no lleva la contrapartida de la representación sensible, se le muestra como mera ilusión a descartar, aunque lo pensado en esa ilusión no fuera contradictorio. Posición, la del constructivismo a lo Poincaré y Hilbert que implica aceptar una vieja tesis sostenida por los matemáticos: la tesis de que la esencia de la Matemática es su libertad, libertad constructiva del hombre, independiente de cualquier tipo de representación figural sensible, independiente de cualquier posible aplicación a la experiencia. Tesis mantenida desde Gauss a Dedekind, desde Cantor a Poincaré y Hilbert de que es el hombre el creador de las estructuras matemáticas, creación hecha por la razón en su transformación, con ocasión de la naturaleza. Posición de creación por el pensamiento, sin tener en cuenta lo perceptivo, que no es kantiana, precisamente.

Cabría preguntarse el por qué, con todas estas diferencias, los intuicionistas matemáticos han acudido a Kant como fuente de cita, de autoridad. Es claro que Kant puso de relieve un cierto matiz de construcción, aunque fuera elemental, pero por lo anterior no se podía ir más allá. Más fundamental, desde mi punto de vista, me parece que se acude a Kant como figura que pudiera contraponerse al platonismo imperante entre los logicistas que habían reivindicado a

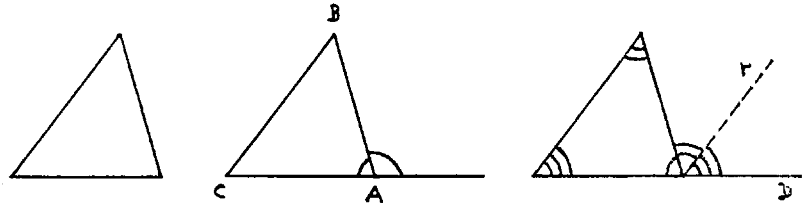
Leilmiz como auténtico precursor de la Lógica formal en la cual querían englobar a la Matemática. Figura contra figura... Y bastaría mencionar la anécdota de Poincaré al salir de la conferencia de Couturat en el centenario de la muerte de Kant comentando irónicamente que bien se veía que se estaba ante dicho centenario...

Con los puntos anteriores he intentado poner de relieve que la insuficiencia de la solución kantiana se liga, realmente, a sus creencias de partida. Así, a la convicción de un apriorismo constituyente del sujeto mediante las formas puras de la intuición, el espacio y el tiempo, a los que hace poseer como características, precisamente, no ya las del espacio perceptivo, sino las del espacio conceptal métrico euclídeo; formas a priori que impedirán representarse otras geometrías que no fueran la métrica euclídea, dado que Kant insiste reiteradamente en las condiciones de construcción para las figuras y tales condiciones son las euclídeas, pero como propias no del espacio en sí, que rechaza, sino de nuestra constitución —condiciones de construcción a las que volveré posteriormente—. Así, la creencia en que el sujeto está constituido de una vez para siempre como sujeto cognoscente, por lo cual dichas formas de sensibilidad, la intuición, se le muestren como algo inamovible; cuando de hecho no hay ideas innatas, ni categorías a priori, ni formas espaciales preformadoras de la intuición establecidas de una vez para siempre. La misma intuición sensible ha ido variando y, desde la admisión de espacio eminentemente perceptivo se ha llegado a intuiciones de carácter mucho más formalizado, abstracto. Así, su radical separación entre conocimiento y pensamiento que le lleva al establecimiento de unos límites, especialmente para la Matemática a los que después haré referencia...

II. METODO

a) Si la Metafísica de la Matemática kantiana se centra en un constructivismo apriorista perceptivo, en la idea de que el sujeto construye los conceptos mediante el intermedio del esquema trascéndental y gracias a la definición, elabora juicios sintéticos a priori que dan el conocimiento o relación objetiva entre el objeto y el concepto bajo el cual éste cae, falta una tercera fase: la del uso argumentativo de la razón. El matemático no sólo construye las figuras y los números y hace juicios sintéticos acerca de tales objetos, sino que maneja los juicios sintéticos a priori en inferencias, en demostraciones, y produce nuevo conocimiento sin tener que acudir para nada a la experiencia. Y esta producción de conocimiento apriorístico sigue siendo un conocimiento universal, necesario. Kant indicará: "La solidez de las matemáticas se basa en definiciones, axiomas y demostraciones" (A 726; B 754). Si de la definición constructiva ya se ha hablado, así como del acto del juicio, quedará mencionar el cómo refleja el matemático la solidez de sus conocimientos mediante el uso demostrativo de la razón. Uso demostrativo que es el que precisamente los racionalistas han querido tomar como ejemplo para cualquier tipo de conocimiento, para la filosofía en particular.

Creo que la mejor exposición de la idea kantiana acerca del método demostrativo matemático es seguir el ejemplo que pone: Establecer una posible relación entre la suma de los ángulos de un triángulo y dos rectos. Lo primero que hace el matemático es construir un triángulo. Uno de los lados lo prolonga porque sabe —en mero proceso heurístico Polya diría 'porque ve'— que dos ángulos adyacentes valen dos rectos. Por el vértice A traza una paralela r a BC y obtiene dos rectas, r y BC, paralelas cortadas por una secante AB, con lo cual —por el teorema de Tales— los ángulos en B y A son



iguales. Como el ángulo BCA y el rAD también son iguales —por traslación o congruencia— resulta que los tres ángulos del triángulo han quedado sobre la recta CAD y, por consiguiente, valen dos rectos. Concluye Kant: "A través de una cadena de inferencias y guiado siempre por la intuición, el geómetra obtiene así una solución evidente y, a la vez, universal del problema" (A 716; B 144).

Cadena de inferencias o demostración que Kant calificará con el término de demostración directa u ostentiva que, "al tiempo que convence de la verdad, enlaza tal convicción con el conocimiento de las fuentes de la verdad" (A 789; B 817). Y ello porque para razonar sobre un objeto a través de su concepto hay que demostrar previamente la validez objetiva de dicho concepto y la posibilidad de su síntesis a priori. Condiciones que vienen dadas, precisamente, por la intuición pura a priori que es, en este caso, quien dirige la síntesis. En la Matemática "todas las inferencias pueden ser inmediatamente guiadas por la intuición pura" (A 782; B 810). La demostración matemática participa, así, del mismo carácter constructivo que poseían sus conceptos y sus juicios sintéticos a priori.

Ahora bien, en contraposición con afirmaciones como las anteriores, resulta que para Kant, "el ámbito propio de las demostraciones apagógicas" es la Matemática, entendiendo por demostración apagógica la que utiliza tanto el *modus ponens* como el *modus tollens,* con lo que son demostraciones que producen certeza pero no la inteligibilidad requerida respecto a los fundamentos de la posibilidad de la misma. Ambito propio porque en matemáticas "es imposible *sustituir* lo objetivo de nuestras representaciones por lo subjetivo de las mismas" (A 791; B 819). Lo que se aclara aún más si se tiene presente la única cita que encuentro en toda la *Crítica* a un resultado del siglo XVIII, el obtenido por Lambert al demostrar la irracionalidad de π. Problema medio geométrico por ir ligado a la cuadratura del círculo y, por tanto, perteneciente a la intuición perceptiva según el kantismo, aunque Lambert en su demostración haga uso de un resultado de Euler en el que demostró, mediante desarrollos de fracciones, la irracionalidad de e y de e^2, de donde Lambert pasa a demostrar que si x es racional distinto de O entonces e^x y tgx no pueden ser racionales y como tg $(\pi/4) = 1$, resulta que $\pi/4$ y, por consiguiente, π, no puede ser racional. Por supuesto, también Lambert ha de emplear el método de aproximaciones por fracciones continuas, cuyo carácter perceptivo intuitivo es nulo, aunque el resultado obtenido permita una posible interpretación o aplicación a un problema geométrico. El comentario de Kant es: "Como no puede darse una solución adecuada mediante los números racionales ni se ha descubierto todavía mediante los irracionales, se ha llegado a la conclusión de que es posible, al menos, conocer con seguridad que es imposible llegar a la solución" (A 480; B 508).

Con lo cual admite Kant que dos de los recursos matemáticos se centran, cuando la demostración directa no es posible, en manejar el *modus tollens* o en alcanzar la imposibilidad de dicha demostración. Elementos que se encuentran de acuerdo con la práctica matemática pero con una salvedad. En estos dos casos, difícilmente se compatibiliza la condición de ser la intuición sensible quien guíe cada uno de los pasos de la inferencia dado que, para ello, hay que recurrir a la negación, y ello supone, precisamente, la imposibilidad de la construcción pedida. Un método como el de reducción al absurdo es un procedimiento no constructivo cuando se supera el ámbito de la elementalidad demostrativa euclídea. Nuevamente, aquí, la posición kantiana se hace confusa por cuanto admite, simultáneamente, método constructivo y método que no lo es, incompatible con una intuición auténticamente constructivista, como pusiera de relieve Brouwer. Desde este último enfoque es preciso rechazar aquellos métodos demostrativos —como los globales de diagonalización cantoriana, los lemas maximales...— que no construyen elemento alguno o, al menos, permiten la posibilidad de dicha construcción. Rechazo que, sin embargo, supone una restricción a la actividad matemática tan fuerte que no ha sido aceptado ni por los propios intuicionistas constructivistas posteriores.

b) Voy a mantenerme en un plano elemental y aceptar el carácter constructivista de la demostración kantiana. Ciertamente el proceso demostrativo antes ejemplificado merece unas puntualizaciones.

Trazar por el punto A del triángulo una paralela r a BC exige el empleo de un postulado, el V de Euclides del paralelismo. Si no se hace referencia a él, desde un aspecto lógico-deductivo la demostración presenta una laguna —afirmación que es válida para otros puntos del proceso inferencial, que exigen, por ejemplo, postulados de congruencia, pero que no voy a tocar—. En cuanto al postulado de paralelismo Kant no hace la menor referencia, por lo que podría afirmarse que la demostración no es correcta desde un enfoque estrictamente lógico. Y no es que Kant no admita la existencia de axiomas, porque llega a la afirmación de su existencia en matemáticas y no así en otros conocimientos, siendo los axiomas "principios sintéticos a priori, en cuanto son inmediatamente ciertos" (A 732; B 760), y pone como ejemplo "Tres puntos se hallan siempre en un plano" (id.). Ahora bien, observando atentamente la marcha sugerida por Kant en el ejemplo, marcha guiada básicamente por la intuición, resulta que el axioma carece de papel alguno, porque en realidad no hay demostración en el sentido de deducción formal, sino una serie de actividades, de construcciones geométricas sugeridas por las condiciones de la construcción. Actividades que implican un cierto conocimiento previo de otras propiedades, ciertamente, pero conocimiento que viene sugerido "por las condiciones universales de la construcción" (A 715; B 742), porque es realmente el esquema el que posibilita la realización de las imágenes, de las figuras singulares que se van obteniendo en el proceso, en la marcha de las actividades, dotando a tales figuras de la objetividad y universalidad requeridas en una demostración matemática.

Se puede afirmar, así, que para Kant no hay en las matemáticas demostraciones, sino construcciones guiadas por la intuición sensible. Acentuar el carácter constructivo frente al apagógico conduce a que no pueda estimarse como interpretación adecuada la que desde Frege se ha realizado acerca de los juicios sintéticos a priori enfocados desde un aspecto estrictamente lógico-deductivo, aspecto que sería radicalmente subsidiario, incluso inexistente desde la interpretación constructivista. Lo cual no quiere decir, por supuesto, que dicha interpretación lógico-deductiva no quede avalada por los textos kantianos como ya he indicado.

Demostración-construcción frente a Demostración-deducción lógica. Pero, una vez más y junto a la ambivalencia en cuanto a la demostración directa y a la apagógica, intervienen las creencias previas kantianas que ya he señalado; en particular, las que hacen referencia a la constitución a priori del sujeto como a las limitaciones que posee respecto al conocimiento de la cosa en sí. Las condiciones que posibilitan la demostración constructiva se le presentan como condiciones inherentes al sujeto y no al espacio en el cual se realiza dicha construcción demostrativa, con lo cual todo el proceso —con sus ensayos y errores, que también forman parte de este tipo de actividad, aunque Kant no los mencione— se muestra esencial a la demostración y no como actividad meramente heurística. Para Kant no constituye el primer paso del hacer matemático que exige, requiere de un segundo paso, el verdaderamente demostrativo o lógico-deductivo que, cuando no se lleva a efecto en niveles elementales es porque tal deducción es inmediatamente elaborable sin más que seguir los pasos del procedimiento heurístico anterior. Kant se limita a la primera fase, pero tomándola como proceso en sí matemático y no como el primer paso, el heurístico. Podía decirse que se ponía en línea con algunos ilustrados que veían la segunda fase como estrictamente artificial y remedio contra escépticos empecinados al tipo de los sofistas.

Creo que es punto crucial y en él Kant estaba equivocado. Me bastaría colocar en una situación parecida, en cuanto a su elementalidad y puesta por mí, a alumnos del ya extinguido Preuniversitario: Hallar una relación entre los ángulos de un triángulo y dos ángulos rectos; pero ahora no sobre el papel o sobre el encerado de la pared, sino sobre una pizarra esférica. El proceso constructivo en cuanto proceso heurístico es el mismo que en el planteado por Kant. Hay que trazar un triángulo, pero ahora no vale decir "por A se traza una paralela" porque en esta pizarra —modelo de una geometría de Riemann —no hay paralelas, porque no puede hacerse uso del postulado del paralelismo de Euclides. Representable, manejable, intuible..., en este triángulo se puede obtener que la suma de sus ángulos es mayor que dos rectos y que el exceso esférico depende de las dimensiones del triángulo. Proceso heurístico que también va guiado por la intuición sensible, ahora más conflictiva, y por las condiciones de la construcción. Bien entendido que esas condiciones no son las del sujeto, sino las del espacio geométrico que ahora se está manejando. No es la constitución apriorística del sujeto la que establece dichas condiciones, sino las del espacio en sí que se maneja. Precisamente el papel de los axiomas, de los postulados, formando un todo coherente, es el de determinar dichas condiciones; son los postulados los que caracterizan, los que delimitan el terreno de juego, por así decir, en el que se pueden construir unas u otras figuras, realizar unas u otras proposiciones, cuyo valor veritativo va a venir condicionado, precisamente, por el sistema formal en el que cobren sentido. Los postulados abandonan de esta manera el papel de 'axiomas' o juicios evidentes por el de meras definiciones disfrazadas, en el lenguaje de Poincaré, caracterizadoras del sistema formal, del terreno de juego. Bien entendido que no cada postulado considerado aisladamente, sino tomados en grupo. La certeza, validez y universalidad de las proposiciones matemáticas queda, así, relativizada, de modo radical, al sistema en el cual se propongan y demuestren. Así, "la suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos" será una proposición no evidente ni universal, sino válida por modo exclusivo para una geometría determinada, falsa para otras y carente de sentido para otras. De todo lo cual se puede, al menos, afirmar:

1. El carácter heurístico de la construcción exige posteriormente la demostración atendiendo, precisamente, a las condiciones del espacio, del sistema formal en el que dicha construcción se realiza. A una fase heurística ha de seguir, necesariamente, una fase auténticamente deductiva que es la que indica si no nos hemos salido del terreno de juego en dicha construcción. Lo cual implica afirmar que las condiciones de construcción no son inherentes al sujeto sino al espacio, al sistema formal, construido libremente por el matemático.

2. No puede sostenerse la convicción de Kant de que los axiomas de la geometría "son los que expresan las condiciones de la intuición sensible a priori bajo las cuales, y sólo bajo las cuales, puede surgir el esquema de un concepto puro de los fenómenos externos; por ejemplo, 'Entre dos puntos no puede haber más que una línea recta'; 'Dos líneas rectas no cierran un espacio', etc." (A 163; B 204). Precisamente el primer ejemplo va en contra de lo que señala un modelo como el de la pizarra esférica. En cuanto al segundo postulado que menciona le sirve para insistir en el hecho de la constitución apriorística del sujeto en cuanto a la intuición de las figuras, de la geometría. Así, indica la posibilidad de pensar, sin contradicción, que dos rectas encierren una figura "ya que los conceptos de dos rectas y su cruce no implican la negación de ninguna figura" (A 220-1; B 268). De hecho, el intento de Ptolomeo de demostrar el postulado del paralelismo euclídeo se basa

en una reducción al absurdo y en la idea de que dos rectas paralelas encierran un espacio, determinan una figura, para alcanzar una contradicción; idea de Ptolomeo que supongamos conocía Kant, al menos a través de Lambert quien se había ocupado inútilmente del problema de las paralelas, del 'escándalo de la geometría'. Concebible, al menos conceptualmente, lo había sido. Pero Kant indica que si bien la imposibilidad no es conceptual, esa imposibilidad es total en cuanto se centra "en la construcción de la figura del espacio" (id.). Y como el concepto sin el objeto es vacío, es mera ilusión, en matemáticas para evitar la misma se parte de la construcción del objeto, y como éste es inconstruible por las condiciones formales constitutivas de la sensibilidad, resulta que, en el fondo, la propia posibilidad conceptual es imposible, ya que no puede alcanzarse concepto alguno si no se ha dado, construido previamente el objeto que lo subtiende.

La teoría kantiana del conocimiento imposibilita la construcción —bien entendido que no sólo perceptiva como en el postulado antes mencionado y que contradice el modelo esférico, sino operatoria— de geometrías no figurales y no sólo de geometrías que puedan representarse en la intuición como algunos modelos realizados por Hemholz, Klein y Poincaré... Como dichas geometrías se han construido, creo que la consecuencia es clara para la posición kantiana y no sólo para su idea de la geometría como se ha venido sosteniendo, sino para todo su sistema.

En cuanto al carácter constructivo de la primera fase del hacer matemático hay que manifestar un total acuerdo con Descartes y con Kant, pero siempre que se interprete como mera fase heurística y no constitutiva de sujeto alguno, al igual que hay que mostrar acuerdo en que la cadena de proposiciones que componen una deducción exige de la intuición que posibilite un dar cuenta de qué regla elegir en cada momento y cómo emplearla; intuición apoyada en la finalidad que se persigue en tal demostración y que, por supuesto, posee el mismo matiz heurístico que el proceso constructivo anterior.

III. LIMITES

Como he ido indicando, la solución kantiana al problema de dar un fundamento, de explicitar la metafísica de la Matemática, se me muestra tanto insatisfactoria como insuficiente. Y su insuficiencia se encuentra, desde mi punto de vista, en la obsesión de hallar unos límites a la razón, al conocimiento que sólo puede referirse al fenómeno, no a la cosa en sí, por lo cual lo que no puede ser objeto de la intuición sensible queda fuera de su alcance. Por otro lado, el uso de la razón matemática queda restringido a un mero uso instrumental, porque según Kant no les incumbe a los matemáticos más que servirse de su constructivismo, perteneciendo al filósofo el dictar los fines de dicho uso así como averiguar los límites del mismo. "El matemático, el naturalista, el lógico, por muy sobresalientes que sean los progresos de los primeros en el conocimiento racional y por mucho que avancen los segundos, especialmente en el terreno filosófico, son meros artífices de la razón. En el ideal se encuentra el maestro que los une, que los utiliza como instrumentos para promover los fines de la razón humana. Sólo a ese maestro deberíamos dar el nombre de filósofo" (A 839; B 867). Para Kant el uso instrumental del conocimiento matemático es clave porque no hay Física que no venga condicionada, precisamente, por la Matemática. Pero, fuera de la esfera de la intuición sensible —aunque introduzca la noción de intuición pura— la Matemática es impotente y aún más, su uso es erróneo, equivocación que se ha realizado alguna vez el de tal uso en terrenos que no le son propios. "Pasan del campo de la sensibilidad al terreno inseguro de los conceptos puros e incluso trascendentales, donde ni el suelo les permite sostenerse de pie ni tampoco nadar (*instabilis tellus, innabilis unda*), sino sólo un paso ligero cuyas huellas quedan completamente borradas por el tiempo" (A 725-6; B 753-4).

No sólo el paso de la sensibilidad al entendimiento, sino el propio uso del método matemático es equivocado fuera de la Matemática. Kant combate la consideración de la Matemática ya como propedéutica, ya como arquetipo o ejemplo al que ajustar los distintos sistemas de conocimiento. Es obsesión sentida por Kant desde tiempo atrás. En 1764 había escrito: "Nada ha sido más pernicioso a la filosofía que la matemática, a saber, la *imitación* en ella del método de pensamiento...". Desde esta obsesión parece necesario limitar el alcance de ese uso instrumental de la razón, el alcance de la Matemática en búsqueda de los problemas centrales de la Filosofía, de la razón pura: *Dios, la libertad, la inmortalidad,* que escapan al conocimiento y que provocan la ya permanente escisión entre conocimiento objetivo, científico, puramente instrumental, y las cuestiones vivenciales, existenciales que determinan la conducta del individuo y dirigen o establecen los propios fines del conocimiento científico. Escisión aún más radical entre los pensadores que suceden a Kant.

Los límites los explicitará en *Prolegómenos* mucho más nítidamente. Distingue Kant entre limitaciones o barreras (*Schranke*) y límites (*Grenze*). Estos, ciertamente, no existen en el interior de un conocimiento, porque las matemáticas no pueden ser acabadas en su proceso interno; es decir, "la ampliación de los conocimientos en las matemáticas y la posibilidad de descubrimientos siempre nuevos llega hasta lo infinito" (pf. 57). Lo que Kant indica es que la Matemática posee unas barreras, unas limitaciones que no puede franquear. Son las limitaciones de la razón humana que no puede ir más allá, en el conocimiento, de los fenómenos. Es la limitación de que hay algo fuera de la Matemática, algo a lo que nunca puede alcanzar. Y la única seguridad se encuentra en el aferrarse a los fenómenos, a lo construido mediante el esquema en la intuición sensible. Es la base por lo cual la Matemática no puede aplicarse a la Filosofía porque en ésta la formulación de los juicios sintéticos a priori se realiza mediante un proceso discursivo, por conceptos, mientras que en la Matemática se realiza intuitivamente, por construcción. Pero aquí se reiteran las sensaciones de incomodidad que señalaba al comienzo.

1. Por un lado, Kant pretende limitar el alcance de la Matemática en cuanto a su método y, sin embargo, al exponer lo que debe ser la ciencia crítica y la filosofía trascendental, parece describir el plan arquitectónico de una ciencia *more geometrico* (A 12 ss; B 25 ss.). Incluso la crítica se muestra como un uso instrumental de la razón en el mismo sentido que la Matemática lo es para la

ciencia natural, pero ahora para una filosofía trascendental. Modelo implícito la Matemática, en el sentido arquitectónico euclídeo, y que luego queda desvelado en la correspondencia privada con Hertz, aunque quede oculto en la *Crítica*. Por otro lado, al describir el uso de la razón en filosofía lo que hace en el fondo es precisamente describir lo que los matemáticos contemporáneos hacían: partir de unas nociones confusas hasta alcanzar el concepto cuya definición es el culmen del proceso y no el punto de partida, utilizando así el concepto antes de haberlo definido; procedimiento análogo al demostrativo donde es la proposición a demostrar el punto de partida y no, precisamente, el punto de llegada como ocurría en la exposición estrictamente lógico-deductiva (A 731; B 759 y nota de Kant). Y lo mismo en el hecho de introducir características no realmente contenidas en el concepto como la posterior crítica a los *Elementos* euclídeos puso de relieve...

2. La posición kantiana de separar radicalmente el conocimiento de lo que pueda ser pensado, de lo conceptual sin objeto, es una separación dogmática. Porque nada permite que pueda realizarse, de una vez para siempre, una clasificación de problemas como científicos por un lado y metafísicos por otro, y nada puede considerarse, en un momento determinado, como carente de significación cognoscitiva —y algo parecido le ocurrió a Frege al suprimir del hacer matemático las series divergentes, utilizadas hoy ampliamente en algunos terrenos del Análisis numérico—. El dogmatismo kantiano impide observar que ya la matemática de su época había traspasado tales barreras y se permitía la construcción de un conocimiento matemático alejado de la intuición sensible, imposible de representar, como fenómeno, en la intuición perceptiva. No digamos la Matemática posterior. Es claro que podría argumentarse al estilo de De Morgan, quien ya en el segundo tercio del siglo XIX, tras la creación por Cauchy del cálculo de residuos y de todo el Análisis de variable compleja, y refiriéndose a los números negativos y complejos, estimaba que no constituían conocimiento porque no eran representables por la imaginación. Aparte del carácter irrisorio, casi ridículo, de quienes así muestran su insipiencia, ello supone quedarse en absoluto desfase de la propia construcción cognoscitiva

a la que pretenden fundamentar. En este sentido parece como si la posición kantiana admitiera que la Matemática euclídea, la Física newtoniana, la Lógica aristotélica, hubieran sido adquisiciones definitivas, invariables ya para siempre; en cuyo caso sería lícito preguntarse, respecto al elemento constitutivo de la sensibilidad y del entendimiento, cómo ambas disciplinas surgieron tan tardías...

3. Enlaza lo anterior con la negativa kantiana a una auténtica creación cognoscitiva por parte del sujeto. Aunque estima que el entendimiento es activo, resulta que las categorías no sirven para crear sino sólo para propiciar la síntesis de lo diverso en la unidad de apercepción. De aquí que nada se gana extendiendo el uso de conceptos más allá de la intuición sensible (B 148). Lo cual se encuentra, si no en contradicción, sí al menos en difícil acuerdo con la posterior afirmación de que las categorías no están limitadas en el pensamiento sino sólo en el entendimiento (B 166), salvo observar que está subyacente la misma limitación, la barrera que Kant coloca al entendimiento respecto a la razón. Barrera de que sólo hay conocimiento de fenómenos aunque el pensamiento pueda llegar a pensar en conceptos que no siendo contradictorios, son vacíos.

Que la limitación kantiana en cuanto a la no creación auténtica de conocimiento matemático se interpreta, como hace Becker, en el sentido de la finitud del hombre, de que realmente no existe la posibilidad de una creación a lo divino, se me presenta como un truismo. En este sentido la posición kantiana es muy clara al insistir en que la intuición del hombre es sensible, negando incluso la posibilidad de una intuición intelectual como había aceptado Descartes. Pero, aun admitiendo esta última, es claro que el ser infinito, eterno, ni cuenta ni geometriza. La actividad del contar o del construir geométrico sólo es factible para un ser que es, por naturaleza, finito. De aquí el papel que hay que asignar al tiempo, que es donde se realiza dicha construcción. Con lo que quizá no esté de acuerdo es con la admisión kantiana de que el tiempo, como forma pura a priori de la sensibilidad, condicione al sujeto a ser una mera potencia receptiva en el hacer numérico, y no espontáneamente creadora porque en este último caso se pasaría del terreno de la sensibilidad al del entendimiento. Y es el paso que Kant intenta prohibir a los matemáticos. Pero a pesar de esta prohibición de Kant, resulta que su propia posición exige tanto de la forma de sensibilidad, pasiva, como del acto de síntesis producido por la actividad del entendimiento. Sensibilidad y entendimiento *conjuntamente* para producir un conocimiento objetivo. La mera receptividad queda, así, superada, pero no la auténtica capacidad creadora del entendimiento a partir de la intuición.

Ya he indicado que existe la posibilidad del pensar, constructivo operatorio y no únicamente perceptivo. Precisamente la Matemática posterior a Kant se va a fundamentar en "hallar la razón", sustituir el cálculo por las ideas y reemplazar el número y la figura por entidades y estructuras antiperceptivas llegando a utilizar, en el primer momento del formalismo hilbertiano, el criterio de consistencia para la admisión de dichas entidades y estructuras. En un segundo momento, y tras los grandes teoremas de limitación, buscando la neutralidad matemática respecto a esas entidades, abandonando incluso el criterio de consistencia, de no contradicción como clave para la existencia matemática. Principio de neutralidad sugerido implícitamente por un intuicionista como Brouwer y de manera explícita por la escuela Bourbaki. Quiero decir, aceptando que la Matemática se apoya en un constructivismo operatorio independiente de los objetos a los cuales se refiere, por lo cual le es indiferente que los mismos sean fenómenos o cosas en sí, que sean meros actos o realidades externas. Desde la admisión del principio de neutralidad, las insuficiencias así como las limitaciones requeridas por el criticismo de Kant para nada afectan al hacer matemático.

Que el sujeto no posea un apriorismo constitutivo regido, en la sensibilidad, por la geometría métrica euclídea; que la intuición sensible lleve a equivocaciones sustanciales en el hacer matemático, y que sea tan limitada que impida 'ver' espacios de más de tres dimensiones, no eliminan la existencia de un problema: la necesidad que el matemático tiene del dibujo para pensar al menos en su fase heurística. Una lemniscata en el borrador de Abel equivale a un 'Eureka' porque constituye la idea de la solución al problema con el que estaba enfrentado: las funciones doblemente periódicas... Que una percepción espacial sea necesaria como fuente de inspiración matemática, es indiscutible, y no sólo contenida en los postulados de partida como quería Pasch, sino en el proceso demostrativo. Es problema no sólo epistemológico sino psicológico. Problema que desborda el cuadro crítico kantiano, y en el que aquí no he entrado. Como tampoco en el paso al innatismo que podría plantearse respecto a las formas de la sensibilidad, innatismo aceptado tanto para la estructura de grupo como para la posibilidad reiterativa por un matemático como Poincaré, y por algunos gestaltistas entre los psicólogos. Igualmente he dejado el problema de la división kantiana entre intuición sensible y pura; la segunda, introducida quizá para avalar las notas de universalidad y certeza que quiere respecto a las nociones y juicios matemáticos, pero que luego suprime al exigir la aparición de la figura en la intuición sensible. Tanto para uno como para otro tipo de intuición los procesos son inaccesibles (**).

JAVIER DE LORENZO

(**) Para la discusión de alguno de estos problemas puede verse BETH, *Mathematical thought* (Reidel, 1965) y *Epistémologie mathématique et Psychologie* (la segunda parte escrita por Piaget, PUF 1961). La cita hecha de Beth corresponde a este último libro. La referencia a Becker es a su obra *Magnitudes y límites del pensamiento matemático* (Rialp 1966, especialmente pp. 187 ss.). Una crítica clara y comprensible al papel de la intuición geométrica, en HANS HAHN, *Die Krise der Anschauung*; traducido en Newmann, vol. 5 de *Sigma*, pp. 342-362. Para una exposición igualmente clara de las críticas a la clasificación de los juicios en analíticos, sintéticos y sintéticos a priori, véase A. PAP, *Semántica y verdad necesaria* (FCE 1970) y *Teoría analítica del conocimiento* (Tecnos 1964).