Estudios Filosóficos, 39 (1990) 33-82

La Matemática en Galileo

1. SITUANDO EL TEMA

Hasta más allá del s. XVII la Matemática se toma en dos frentes:

a) Simbólico puro, y es la línea de los renacentistas, de los humanistas y artistas y, básicamente, de los pitagóricos y herméticos. Desde lo simbólico la naturaleza es matematizable y la captación de su esencia ha de hacerse a través del lenguaje numérico y geométrico, pero tomando números y figuras como signos que reflejan lo simbolizado: el círculo representa la perfección de la órbita del cuerpo celeste; el espacio tiene tres dimensiones como imagen de la Trinidad; el Sol, inmóvil en sí, es fuente de todo movimiento y energía, símbolo de la Divinidad... Desde este enfoque la numerología y la geometría han sido implantadas en el universo y basta leer «matemáticamente» para captar la esencia del mismo. En lo operativo, un edificio ha de responder a unos cánones o proporciones matemáticas que den belleza absoluta, que reflejen el principio de identificación del cosmos; proporción básicamente geométrica expresable fundamentalmente mediante razones, que no son algebraicas, no formales. Proporción que, en la pintura, va a reflejar una nueva visión del espacio mediante la creación de la perspectiva.

b) Comercial. Desde la adopción de la numeración decimal posicional, desde los intercambios comerciales hay que hacer uso de una Aritmética ya sígnica y no meramente de ábaco, porque hay que hacer asientos, calcular herencias, realizar repartos, resolver ecuaciones...

En ninguno de estos dos usos, instrumentales en el fondo los dos, la Matemática refleja, en sí, el cosmos. Es un medio para obtener tal reflejo pero sólo como instrumento para, a su través, captar la filosofía natural, la fisis. Un ejemplo característico se tiene en la figura de Copérnico: por un lado, se dedica a la rama comercial; por otro, a la Astronomía. En ésta provocará una revolución, ciertamente, al proponer el sistema heliocéntrico. Pero el mismo puede interpretarse bien desde lo simbólico, bien desde lo instrumental, como modelo o hipótesis para salvar las apariencias. Se puede manejar el sistema heliocéntrico al igual que el geocéntrico sin entrar en el problema de que la realidad del sistema solar sea o no de uno u otro modo.

La Matemática permanece bien como instrumento útil de cálculo —para mediciones, reparto de herencias, cálculo de pérdidas y ganancias...—, bien como instrumento que posibilita modelos con los que hacer cálculos más cómodos en terrenos como los astronómicos, bien como símbolo que, a su través, consigue la captación de la esencia de la fisis.

Frente a la concepción simbólica, a la instrumental, surge en el XVII otra corriente en el estudio de la naturaleza: la de los «naturalistas», empiristas puros. El Colegio invisible de Londres, que da paso a la Real Sociedad británica, es el prototipo de «empiristas» o naturalistas. Es claro que se enfrenta a la corriente simbólica y, desde este enfrentamiento, por el que se identifica Matemática con pitagorismo hermético, se rechaza cualquier empleo de la misma en la descripción o captación de los fenómenos naturales.

Enfrentado a los naturalistas, a los simbolistas puros, a los comerciantes o calculistas, el XVII ve surgir un nuevo aspecto del hacer matemático. Un aspecto conceptual desde el cual se afirma que la filosofía natural, la física, sólo puede venir dada a partir de la Matemática. No simbólica o mítica, ni salvadora de apariencias, ni meramente operativa: conceptual. Y entre quienes realizan esta inversión epistemológica se encuentra, precisamente, Galileo.

Galileo, que es buen experimentador, va a terminar acudiendo a la Matemática, con la afirmación explícita de que la filosofía natural, la física, viene constituida, en su plano de conocimiento, por lo matemático. Bien entendido que no como símbolo mediador, o como mero elemento operativo, sino la Matemática como marco constitutivo de todo conocimiento verdadero, auténtico.

Y es aquí donde se encuentra el primer principio epistemológico base del hacer galileano, y que, en sus palabras de los *Discorsi*, se enuncia:

(P 1) Las leyes de la Mecánica tienen sus fundamentos en la geometría (p. 50).

Para formular este primer principio adopta, de modo implícito, que esa geometría, esa matemática, es la que se moldea en los *Elementos*.

Aceptar este principio epistemológico-ontológico entraña una serie de problemas y consecuencias. Muy breve, porque lo he tratado en otro lugar. La crítica, desde Aristóteles, indica que la Matemática trata con formas puras y éstas no se dan en la realidad perceptiva fenoménica. Como solución, eliminar lo no matemático estimándolo como no real, como meramente subjetivo, incapaz de objetivarse en conocimiento. Eliminación que supone aceptar que el conocimiento lo es de cualidades primarias: extensión, forma, cantidad, movimiento... No hay conocimiento objetivo de cualidades secundarias. Y es lo que sostendrá Galileo a partir de *Il Saggiatore* (§ 48). Conocimiento auténtico porque las cualidades primarias constituyen la esencia de los objetos.

Ello supone que el verdadero saber de lo constitutivo de la naturaleza se encuentra en lo conceptual, no en lo perceptivo ni en lo simbólico. Inversión que consiste en ir de lo conceptual a lo perceptivo y no de lo perceptivo o fenoménico a lo conceptual, ni de lo perceptivo a lo simbólico. Inversión que supone la adopción de un espacio antiperceptivo, antifenoménico: el espacio euclídeo, el geométrico. El conocimiento ha de situarse en este marco conceptual donde no se elaboran hipótesis salvadoras de apariencias sino fragmentos auténticamente cognoscitivos. En este sentido el matemático ha de realizar demostraciones a lo matemático. Son las demostraciones las únicas que dan necesidad, además de la belleza y el rigor. Y las demostraciones «geométricas», matemáticas, para serlo, han de partir de unos principios indubitables. Leitmotiv permanente en Galileo: la búsqueda de principios, junto a la necesidad de la demostración matemática, que impide, a la vez, la elaboración de criterios míticos de correspondencia. Demostración que, igualmente, se diferencia del mero argumento persuasivo, del que establece «buenas» razones que pueden llegar a convencer, a persuadir, pero carentes del carácter de necesidad. En Matemática, no se convence con buenas razones ni con símbolos más o menos transparentes: se demuestra, racionalmente. Y es la razón la única que posee esa facultad cuando maneja el método adecuado.

El principio (P 1) se hace, así, una de las claves de la inversión epistemológica conceptual: hay que explicar lo evidente, lo perceptivo, por lo que no es evidente ni perceptivo, por aquello que puede chocar, incluso, con el sentido común. Y ello supone, evidentemente, un refuerzo a la consideración del papel de la demostración al estilo matemático, riguroso.

Inmediato problema se centra en la relación entre ese mundo conceptual de cualidades primeras, base de lo cognoscitivo, y el mundo fenoménico; la adecuación o no entre ambos y que desde lo simbólico se muestra como problema ausente, por su principio de correspondencia. Es claro que esta adecuación, desde lo racional, no es total, hay que realizarla mediante pequeños retoques, como en el caso del movimiento de proyectiles que, en lo conceptual, siguen una parábola, pero en la práctica no lo hacen porque existen rozamientos, fuerzas mínimas que habrá que tener en cuenta pero, y ésta es la clave, estos retoques son cuestión secundaria realmente. Y lo son porque Galileo va a admitir un segundo principio epistemológico-ontológico:

(P 2) El Universo está construido según leyes matemáticas. Es decir, aunque lo fenoménico se muestre aparentemente disconforme con la forma geométrica pura o con la proporcionalidad, es disconformidad sólo aparente. Lo que no responde a ley matemática es precisamente lo percibido, que es subjetivo, temporal, dependiente del sujeto que percibe. Más allá de esa subjetividad se encuentra lo auténticamente sustancial, esencial, que es el universo de cualidades primarias, construidas matemáticamente. Y la captación de esa sustancialidad sólo puede hacerse mediante su propio elemento constitutivo, la Matemática.

Bien entendido que Galileo no identifica espacio geométrico con espacio fenoménico. Lo que hace, en el fondo, es crear el espacio conceptual para el conocimiento. Marco conceptual que trasciende lo fenoménico y que, por ello mismo, produce conocimiento verdadero, al existir adecuación intrínseca entre ambos. Adecuación asegurada porque lo que trasciende a lo fenoménico está construido de acuerdo a principios, leyes matemáticas.

Una de las dificultades para el físico-matemático se centra en la captación de los principios constitutivos de ese mundo que subtiende lo fenoménico. Pero, captado, se tiene el conocimiento total y absoluto del universo, de lo real. Captación que ha de venir dada, sin embargo, desde lo fenoménico-conceptual. Desde lo fenoménico transformado. Quiero decir, el físico-matemático no sólo ha de establecer demostraciones matemáticas que a la vez que indican la necesidad cognoscitiva, persuaden, sino que ha de acudir al enlace con lo fenoménico mediante el establecimiento de «experimentos» que provocan fenómenos que han de percibirse desde las propiedades establecidas en lo conceptual y que han de servir, además, como falsadores de esas propiedades.

Con ello indico, a la vez, que desde lo conceptual se llega a modificar lo perceptivo. Y aquí se centra una de las claves de los experimentos. Hay que hacerlos, pero sólo cobran sentido desde lo conceptual. La observación desnuda no basta. Una vez que se han observado los satélites mediceos, cada vez que un observador los contemple, verá que son satélites, no meros puntos luminosos que previamente se han marcado para ser observables. Ello implica la necesidad de crear permanentes experimentos, alguno de los cuales será, exclusivamente, mental, pero no por ello dejará de obligar a percibir de una manera nueva aquello que se maneja, al igual que conducen a la necesidad de un criticismo racional constante respecto a lo que el sentido común establezca.

Por un ejemplo de este tipo de necesidad crítica. En los *Discorsi*, se comienza con una discusión acerca de la resistencia de los cuerpos en relación con el tamaño. El sentido común parece indicar que cuanto mayor sea un cuerpo más resistente es. Es decir, si se aumenta de volumen, aumenta de resistencia. Lo cual parecería tener sus posibles aplicaciones para la construcción, por ejemplo. Sin embargo, la experiencia parece contradecir esta observación: las columnas sostén se quiebran antes. Como argumento, se viene sosteniendo que ello se debe a que la materia es imperfecta. Pero Galileo indica que no basta sugerir esa imperfección para explicar la desobediencia de los cuerpos y las máquinas a leyes abstractas e ideales. Y aunque la materia fuera perfecta, resulta que lo que hay que saber es que el mayor tamaño —siempre que se tenga la misma proporción e idéntica materia— responde a las mismas condiciones que el menor, salvo precisamente en la solidez y en la resistencia: cuanto más grande tanto más débil ha de ser, proporcionalmente. Y ello viene establecido, con necesidad, desde lo geométrico, que es lo que hay que saber leer en este fenómeno:

> «se puede demostrar geométricamente que las más grandes son siempre, proporcionalmente, menos resistentes que las menores» (p. 51).

Consecuencia: hay límites en la morfología de los cuerpos, de las máquinas. Galileo establece lo que hoy viene denominándose, en estos campos de crecimiento morfológico, la ley del cubo-cuadrado, que justifica el tamaño adecuado de las máquinas y los animales: el volumen aumenta en proporción al cubo de la dimensión, mientras la resistencia aumenta en proporción al cuadrado de la misma. Lo que me interesa destacar es el hecho de que hay leyes que rigen hasta lo morfológico y que explican el tamaño ideal de los cuerpos y las máquinas. Leyes que pueden chocar, incluso, con el sentido común. Para Galileo la clave se centra en conseguir, en observar dicha ley subyacente, sabiendo que la misma vendrá expresada, siempre, mediante una proporción matemática.

Y dos incisos: las palabras anteriores resumen la última posición de Galileo, incluso las he tomado, en algunos casos, literalmente. Pero cabe observar que es la misma posición que van a adoptar los llamados «racionalistas», son los mismos argumentos que establecerán Descartes o Spinoza.

El segundo es una proposición hipotética. Es la pregunta por el momento en el cual llegó Galileo a esta posición, no mantenida desde un principio. Mera hipótesis, creo que fue tras la observación de los satélites mediceos, en enero de 1610. La pura observación no bastaba para llegar a la conclusión de que los puntos brillantes que se veían a través del telescopio constituían un sistema solar en miniatura. Lo que se ve empíricamente, sin conceptualización previa, es meramente unos puntos brillantes. Lo que desde una teoría se alcanza a percibir es un sistema equivalente al sistema solar. Y creo que es la auténtica conversión galilea al copernicanismo, conversión en la que, además, tal sistema se muestra no como mero salvador de apariencas, sino como elemento conceptual que describe la realidad tal como es. Lo que sí puede afirmarse es que en *Il Saggiatore* mantiene la primacía de la Matemática como marco conceptual, la defiende en *Los dos sistemas del mundo,* donde se apoya en el platonismo, y la formula definitivamente en *Discursos y demostraciones de dos nuevas ciencias.*

2. INDIVISIBLES E INFINTO, CLAVES PARA LA EXPLICACION FENOMENICA

Es en *Discursos,* que en lo sucesivo citaré como *Discorsi,* en la que Galileo expone, de modo sistemático, constructivo, dos ciencias nuevas. Y ello porque no basta hablar sobre la importancia constitutiva de la Matemática: hay que mostrarla, hay que establecer las leyes matemáticas de los fenómenos y las demostraciones consiguientes que subyacen a las propiedades de los mismos. Y esta es la misión de los *Discorsi*, con la plasmación de dos ciencias nuevas. Ciencias de las que una ha quedado, hoy, muy en olvido mientras la ciencia del movimiento, la que narra en las Jornadas III y IV, permanece como una de las máximas glorias galileanas.

Las dos siguen el mismo esquema: partir de la Matemática como marco conceptual reemplazando lo fenoménico por lo matemático. Con lo cual esas dos ciencias nuevas muestran el papel constitutivo del hacer matemático para la explicación conceptual de la física, de la filosofía natural.

Papel constitutivo que se manifiesta en la incorporación, y como elementos imprescindibles para la explicación de lo fenoménico, de los indivisibles y el infinito. Para explicar un fenómeno, un hecho de la experiencia ordinaria, Galileo va a recurrir, desde el principio, a estos dos elementos, manifestación última de lo que he calificado como inversión epistemológica: se explica lo evidente a partir de lo menos evidente posible. Infinitos e indivisibles de los cuales insistirá, al menos en tres ocasiones, que exceden no ya a la percepción sino a cualquier tipo de imaginación. Pero son elementos matemáticos, elementos que impone la razón a pesar de que sean difícilmente manejables por nuestro entendimiento finito. Y los impone para dar cuenta de la constitución de las dos nuevas ciencias, mero ejemplo de lo que otros podrán realizar. Galileo los emplea para dar cuenta:

a) De la impenetrabilidad de la materia y, con ello, de fenómenos como los de cohesión, rarefacción, condensación de los cuerpos, así como para explicar los estados en que se manifiesta la materia;

b) Del movimiento de los cuerpos, tanto uniforme como naturalmente acelerado;

c) Como consecuencia de b. y del método de composición de movimientos, de la trayectoria de los cuerpos con un impulso determinado.

En este punto debo realizar una observación. La Jornada I alcanza, desde la perspectiva aquí esbozada, una categoría máxima en el desarrollo de todo el pensamiento de Galileo. Es en ella donde introduce los infinitésimos o indivisibles así como los métodos matemáticos básicos para su manejo, junto a los clásicos de proporcionalidad entre magnitudes, que se exponen tanto en el Libro V de los *Elementos* de Euclides como en el opúsculo *De la espiral* de Arquímedes, a quienes sigue muy fielmente. Pero, muy curiosamente, esta Jornada I no ha recibido toda la atención que se merece y ello desde la misma edición de la obra, en 1638. Desde un Descartes, que sí la estudia pero para considerarla como una parte desordenada y llena de falacias, hasta últimos autores que la consideran como una pieza inorgánica, desordenada, frente al estilo expositivo, euclídeo, de la Jornada III.

Ciertamente es más cómodo seguir la exposición galileana de la Jornada III, habituados al estilo euclídeo. Pero tal Jornada se muestra incomprensible si se olvida uno de la Jornada I porque en ésta Galileo no sólo introduce los infinitésimos e indivisibles sino los métodos y, tras ellos, lo que va a constituir una de las claves para la posible comparación de magnitudes continuas, una de las claves de la Jornada III, el principio que denomino (PM); y que es el que permite realizar la comparación de las magnitudes espacio, tiempo, velocidad siempre en función de sus infinitos componentes indivisibles, que posibilita llegar a la proporcionalidad, es decir al establecimiento de las leyes del movimiento, así como a sus demostraciones matemáticas.

No es mero pasatiempo la Jornada I, mero transcurrir de un diálogo lleno de paradojas y dificultades, sino la auténtica base metodológica de la constitución físico-matemática conceptual galileana.

Voy a limitarme, en lo que sigue, y precisamente por las consideraciones anteriores, a rastrear dónde introduce los infinitésimos o indivisibles, cómo pretende su aprehensión, qué papel juegan, pero sólo en la Jornada I. Para ver el papel que juegan en la Jornada III me remito a cualquiera de los estudios realizados sobre Galileo, así, Renou o Galileo-3.

1.° *Dónde los introduce*

En la Jornada I los interlocutores del diálogo se plantean unas cuestiones básicamente dinámicas. Cuestiones ya muy clásicas y a las que muchos autores han dado respuesta y obtenido conclusiones coherentes, como reconocen los interlocutores. Pero tales respuestas han sido meramente conjeturales, suposiciones, proposiciones persuasivas; carecen, por tanto, de cualquier nota de necesidad. Y carecen de dicha nota porque no han sido demostradas matemáticamente. En la p. 54 explícitamente se dirá:

> «nuestro académico... meditó mucho acerca de tales cosas, demostrándolas geométricamente, como era su costumbre, de tal modo que esta ciencia, por él cultivada, merece el nombre, no sin razón, de ciencia nueva. Y es que, si bien algunas de las conclusiones provienen de otros, y de manera especial de Aristóteles, tened presente, sin embargo, que aquéllas no son ni tan bellas ni (y esto es lo importante) se prueban con demostraciones necesarias a partir de principios indudables y fundamentales».

La ciencia nueva a la que hace referencia tiene como objetivo resolver los problemas siguientes:

En primer lugar, de dónde procede la resistencia de los cuerpos a la fractura, es decir, cómo explicar la cohesión de las partes de un cuerpo.

En segundo lugar, esa cohesión parece ir ligada a la impenetrabilidad de los cuerpos y, ambas, se enfrentan a los problemas de la rarefacción y condensación.

En tercer lugar, y enlazado con los problemas anteriores, hay que explicar las diferencias de los estados físicos en que se muestra la materia.

Haciendo camino, habrá que plantear problemas como los de la transmisión de la luz a través de los fluidos o la transmisión de los sonidos, lo que enlaza con la música, por ejemplo.

Que sean temas clásicos era obvio. Pero los mismos habían cobrado importancia en los medios «intelectuales» europeos tras la publicación de las *Cuestiones mecánicas*, atribuidas a Aristóteles y que hoy se atribuyen a autor distinto, aunque desconocido, el pseudo-Aristóteles. Entre estas cuestiones se plantea la paradoja calificada de «la rueda de Aristóteles», que permite a Mersenne convertirla en tema central de consulta a Galileo, a Roberval, a Fermat... Incluso con la sugerencia, de 1625, de que su solución podría dar paso a la explicación estrictamente mecánica del problema de la rarefacción y condensación, así como Mersenne hará claras referencias a la composición de movimientos, establecida previamente por Roberval... Es paradoja que permite a Roberval, desde al menos 1630, identificar la curva cicloide o trocoide y plantear la problemática del volumen y de la cuadratura que engendra al rotar la curva alrededor de la base, para lo cual alcanza la misma metodología que Galileo introduciendo los indivisibles o infinitos, con independencia de Galileo y Cavalieri.

Si la paradoja de la rueda venía siendo tratada desde al menos 1547 por Picolomini, otros temas de indivisibles eran obligados antes. No son temas, ciertamente, nuevos. Pero sí lo es el papel que van a adoptar en la obra de Galileo, apoyado en sus dos principios epistemológico-ontológicos señalados, con la inversión conceptual que los mismos suponen.

El primer problema, la resistencia de los cuerpos a la fractura, implica la existencia de una cohesión entre las partes de dicho cuerpo. La explicación tradicional se centra en que esa cohesión es debida al horror al vacío, inexistencia de vacíos que permite explicar que la materia sea impenetrable. Galileo rechaza, en principio, la noción de horror al vacío. Y uno de sus argumentos

> «si un millón de oro, traído de España cada año no fuese suficiente para pagar al ejército, habría que encontrar otros recursos para pagar los sueldos de la tropa» (p. 61).

Y esto viene a significar que si un vacío de un millón no puede explicar el total, cabe hacerlo mediante un millón de vacíos, pero más pequeños. En otras palabras, negando el vacío como total puede admitirse la existencia si no de una multitud de vacíos, sí de partículas inextensas como componentes de la materia junto a partículas extensas. Las inextensas hacen un efecto de ventosa que, sumado, producirá la resistencia del total. Cada una de esas ventosas se puede superar fácilmente, pero no así su unión porque

> «de la unión de un gran número de momentos insignificantes, resulta una fuerza inmensa» (p. 67).

En el fondo, lo que hace Galileo es considerar el total no en intensión, sino en extensión distributiva de cada una de sus partes componentes. Pero este argumento permanece en el terreno argumentativo: Como reconoce Galileo se está en terrenos de pura imaginación, de conjetura, no en los auténticamente demostrativos. Se habla de una multitud inmensa de partículas inextensas que presionan y dan la cohesión de una materia extensa, lo cual se muestra, además de conjetural, paradójico. Y, además, provoca serios problemas, como por ejemplo, el de si una multitud de partes, unidas, da lugar a una extensión; si la multitud de tales partes es extensa parece claro que esa extensión ha de ser infinita y el cuerpo que se tiene delante posee una dimensión finita... No hay posiblidad alguna de acudir al experimento. Este carece de papel, de sentido, aquí. Y desde el mismo planteamiento. Se puede acudir, no sé si irónicamente, a una infinitud de hormigas que llegarán a arrastrar todo el trigo de un barco y al propio barco; no es argumento...

Y es aquí donde Galileo recurre a la Matemática, a los indivisibles y al infinito. Para tratar de superar los problemas que plantea una cuestión de dinámica, un fenómeno físico, el de la cohesión de las partes de un cuerpo material mediante la afirmación de que existen partes inextensas, Galileo penetra resueltamente en los terrenos de la Matemática.

2.° *Cómo pretende su aprehensión*

Y, para ello, y en paralelo estricto a la pregunta de cómo explicar la cohesión de las partes de un cuerpo material, Galileo se plantea como problema, ahora matemático, si se puede demostrar —no ya conjeturar— que

> en una extensión continua finita se pueden encontrar infinitas partes que, sin ser vacíos, hagan el papel de los mismos.

Y la respuesta de Galileo no va a ser frontal, no va a consistir en una serie de proposiciones, definiciones, demostraciones. Lo va a hacer mediante el planteamiento de una serie de paradojas y problemas matemáticos a lo largo de cuya discusión irá haciendo las demostraciones pertinentes, además de que podrán ir obteniéndose otros conocimientos nuevos y admirables. Bien entendido que todo se centra, en el fondo, en la búsqueda de una respuesta «matemática» a la pregunta planteada. Respuesta que será, precisamente, el principio (PM).

Que los introduzca como paradojas podría justificarse argumentando que son elementos que, realmente, escapan a la imaginación; por supuesto, a los sentidos. De aquí que, al tener que manejar conceptualmente estos elementos, por chocantes con el sentido común, deban establecerse en su sentido propio, ser paradójicos. Galileo pugna en el establecimiento del marco conceptual frente a lo perceptivo.

Pero también frente a los simbólico. Porque la admisión de partes inextensas como últimas componentes de la materia parecía recaer en un atomismo que había sido explícitamente condenado por la Iglesia de Roma; así, el Concilio de Constanza de 1415 había considerado herética la idea de que una línea estuviera compuesta de indivisibles. Y ya Galileo había sido atacado por Grassi, en respuesta a *Il Saggiatore*, por entrar en la «vía de aquellos vacíos diseminados de los que habló cierto filósofo antiguo» que negaba la Providencia divina

> como en ocasión parecida y muy inoportunamente, apostilló cierto adversario de nuestro Académico (p. 72).

Como recordará de modo explícito Galileo. No parecería muy conveniente, por ello, el establecimiento de toda esta teoría de indivisibles e infinitos, que conviene tomar en consideración al mismo tiempo, a base de definiciones, teoremas, demostraciones, sino mediante un estilo paradójico y como «caprichos humanos»,

> «pues tal es el nombre que merecen en comparación con las doctrinas sobrenaturales, únicas guías seguras y verdaderas de nuestras discusiones que nos conducen infalibles a través de nuestros oscuros y dudosos senderos o, por decirlo mejor, a través de nuestros laberintos» (p. 77).

Pero toda paradoja es un símbolo, como bien recordaría P. Costabel. El problema que se presenta es, entonces, ver de qué son símbolo. En otras palabras, la cuestión, ahora, es ver qué papel hace jugar Galileo a las paradojas y métodos matemáticos con los que introduce los infinitésimos o indivisibles y el infinito.

3.° *Qué papel juegan las paradojas y los métodos*

Hay dos papeles diferentes de las paradojas y los métodos en el discurso galileano:

Por un lado, muestran un papel intrínseco al hacer matemático, planteando cuestiones y problemas estrictamente matemáticos.

Por otro lado, un papel extrínseco, y que considero esencial al empleo que hace de estos elementos Galileo. Desde el extrínseco, Galileo no actúa como matemático sino que los elementos matemáticos se muestran regulativos del discurso explicativo físico. Papel regulativo por el que se constituye, precisamente, la nueva ciencia.

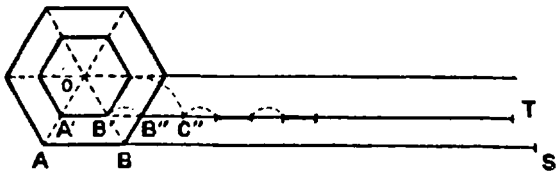
a) *Pepel intrínseco matemático*

El papel de las Paradojas

Paradoja base: La rueda de Aristóteles

A la pregunta de si en una extensión continua finita se pueden encontrar infinitos vacíos, responde Galileo estableciendo la paradoja del pseudo-Aristóteles. Pero, con extraordinaria habilidad, antes de plantear dicha paradoja con su posible solución asociada, Galileo recurre a una transformación de la misma, donde va a hacer ver lo que posteriormente quiere que se vea, y donde establece uno de sus métodos centrales.

Para ello considera, en primer lugar, dos polígonos regulares concéntricos, de *n* lados. El mayor desarrolla su perímetro a lo largo de una línea que prolonga uno de sus lados mediante rotaciones sucesivas con centro cada uno de los vértices. El desarrollo del polígono da lugar a la línea ABS. El polígono menor, arrastrado en su movimiento por el mayor, desarrolla su perímetro a lo largo de la línea A'B'T, paralela a ABS. La línea A'B'T contiene el desarrollo del polígono menor, pero a trozos discontinuos: es decir, contiene los lados A'B', B"C", etc., entre los cuales existe un intervalo vacío. En total habrá *n-1* intervalos vacíos.



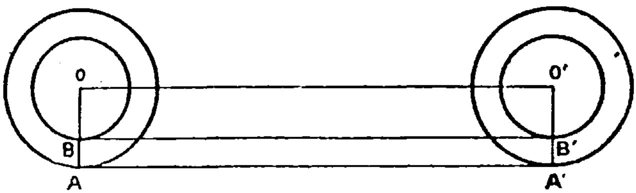
Con este ejemplo Galileo introduce, realmente, lo que desea que el lector termine «viendo»: la línea A'B'T está compuesta de partes extensas, de segmentos equivalentes a los lados, y de partes «inextensas" o vacías entre los anteriores y de «igual» número. Además, si se considera la línea A'B'T formada por ambos tipos de intervalos, resulta que la diferencia entre los desarrollos de los perímetros de los dos polígonos es, precisamente, un intervalo vacío, por lo que puede afirmarse que ambas son, aproximadamente, iguales.

En un segundo momento, se observa que si se aumenta el número de lados, la diferencia entre los desarrollos de los dos polígonos tiende a cero. Así, si el polígono mayor tiene mil lados, el pequeño recorrerá aproximadamente una línea de longitud igual con la interposición de mil espacios vacíos (p. 70).

Galileo hace admitir, intuitivamente, que una línea puede estar compuesta de partes extensas y partes «vacías» o no extensas y que ambos tipos de partes se van haciendo cada vez más pequeñas. En este paso, si se hace que el número de lados del polígono tienda a infinito entonces la extensión de cada lado de los polígonos y la correspondiente a los intervalos vacíos tiende a cero, se van haciendo infinitamente pequeños.

Y es ahora cuando Galileo hace estallar la paradoja: Identifica la circunferencia con un polígono de infinitos lados —por lo que han de ser, todos ellos, inextensos— y repite el razonamiento hecho con los polígonos: lo que se obtiene como conclusión, inmediata, es que la longitud de los perímetros de dos circunferencias concéntricas de radios diferentes es la misma. Pero

> «¿cómo es posible que el círculo más pequeño pueda recorrer, sin saltarse nada, una línea mucho mayor que su circunferencia?" (p. 70).



Una objeción, clásica: puede hacerlo porque el pequeño no sólo rueda sino que se desliza a lo largo de la línea tangente. Pero Galileo establece tres razones para rechazar la posibilidad de los deslizamientos infinitamente pequeños que, según él, tendrían que ser un número infinito:

1. En primer lugar, no es concebible que sólo alguno de los puntos de contacto se deslice; lo que ocurre es que el polígono pequeño se aplica periódicamente sobre la tangente, aplicación que viene separada por las elevaciones del polígono sobre tal línea, y estas elevaciones son las que dan paso a las partes «vacías».

Es un razonamiento, evidentemente, falso. Porque al pasar del polígono a la circunferencia, tal elevación deja de producirse, y el mismo Galileo lo afirma. En esta argumentación Galileo comete un sofisma.

2. Si el pequeño se deslizara en un número infinito de ocasiones, entonces en cada momento daría lugar a una extensión y, por muy pequeñas que sean estas extensiones, como su número sería infinito, se obtendría una extensión suma infinita y lo que se tiene es una línea finita.

Argumento contradictorio porque hace que los deslizamientos sean extensos mientras que los rodamientos no. Con lo cual hay mezcla o confusión entre ambos tipos de movimiento y, a la vez, entre partes extensas y no extensas. En otras palabras, Galileo supone, por un lado, que los lados del polígono con infinitos lados son inextensos, pero por otro supone el desarrollo extenso de su perímetro correspondiente.

3. El punto de contacto de la circunferencia mayor y el centro varían con el rodamiento, pero el punto de contacto de la circunferencia menor con su tangente viene dado por el radio que une el centro con el punto de contacto de la circunferencia mayor. Y, además, viene determinado de manera única. Existe, por tanto, una correspondencia biyectiva entre ambas circunferencias y las líneas sobre las cuales se desarrollan. Correspondencia que implica que ambas circunferencias poseen el mismo número de puntos y que este número es igual a los dos segmentos sobre las tangentes paralelas.

Este último argumento es el decisivo. Es el que establece, mediante una correspondencia biyectiva, que los desarrollos de ambas circunferencias tienen que ser iguales. Y es la biyección la que impide salir, realmente, de la paradoja.

Salida que Galileo ve únicamente en la admisión de que la línea tangente a la circunferencia mayor esté «tomada continuamente», mientras que la correspondiente a la menor consta de vacíos, tantos como lados tiene la circunferencia y de su misma extensión: es decir, infinitos «vacíos» inextensos —y es lo que ha hecho «ver» mediante el desarrollo previo de los polígonos—. La línea estará compuesta, por ello,

> de infinitos puntos, en parte llenos y en parte vacíos (p. 71).

Y éste es el papel intrínseco matemático que Galileo asigna a esta paradoja: con ella *demuestra* que una extensión finita continua puede descomponerse en dos tipos de partes: Unas que son *in parti quante* y otras que son *in parti non quante.*

Las que son *in parti quante* son extensas, medibles, numerables. Su enumeración determina, siempre, una extensión finita. Tienen como propiedad el hecho de que si se descompone una línea finita, una extensión, en estas partes, entonces su posterior unión sería imposible que alcanzara una extensión mayor que la línea de partida.

Las que son *in parti non quante* son indivisibles o infinitésimos, no numerables o medibles, son no extensos. Como propiedad básica se tiene que

> «si nos imaginamos una línea dividida en partes que no tienen cantidad, es decir, en sus infinitos indivisibles, podemos concebirla como extendida inmensamente, no por la interposición de espacios vacíos que tienen cantidad, sino más bien por la de infinitos indivisibles vacíos».

Lo que Galileo viene a sostener es que toda figura matemática puede considerarse resuelta, dividida o fragmentada de dos formas radicalmente distintas entre sí:

1. La que puede hacerse de modo efectivo, por enumeración de partes extensas y que siempre tiene un límite en la división, porque al dividir una parte extensa en dos, por ejemplo, implica que ambas partes sigan siendo extensas. Una participación material no dará, jamás, los primeros componentes indivisibles. Y ello no implica que

tal partición material, efectiva, tenga lugar o sea fácil de hacer. Toda partición material tiene unos límites fácticos: basta intentar dividir un segmento en mil partes iguales, por ejemplo, o más aún, en un número de partes que sean primos entre sí... Pero, como límites fácticos, no son límites absolutos.

2. La división que puede imaginarse como fragmentada en partes no extensas, en indivisibles, sin extensión. Los indivisibles constituyen, realmente, los primeros componentes de la figura dada. No es posible obtenerlos por enumeración ni por división material continuamente reiterada. Sin embargo, tal obtención sí es posible mediante un acto único que los ponga en presencia. Acto único que viene establecido por el hecho de que una circunferencia puede desarrollarse a lo largo de una de sus tangentes. Como la circunferencia es un polígono de infinitos lados, al rodar sobre una recta, su desarrollo finito muestra, en ese momento, la totalidad de sus partes inextensas o indivisibles. Pero ello implica que basta un acto único para poner en evidencia la infinitud de una extensión: una aplicación biyectiva de la circunferencia con un segmento —su desarrollo—. Es esta biyección la que permite actualizar una magnitud compuesta de infinitas partes no extensas (p. 93).

Admitir estos dos tipos de división y el acto único de actualización, conduce a admitir que la enumeración «in parti non quante» determina una extensión finita. En otras palabras, puede responderse radicalmente a la pregunta inicial que daba paso a la paradoja

> (PM) toda magnitud finita continua está compuesta de infinitos indivisibles (p. 80).

Inmediata, la cuestión de las partes extensas de una magnitud finita están en número finito o infinito y, en este último caso, si en acto o en potencia. Si fueran infinitas, argumenta Galileo, bien en acto o en potencia, por extensas, darían siempre en su unión una magnitud infinita, contra el hecho de ser las partes de una extensión finita, por ir en contra del principio básico de las partes extensas de una extensión. Luego parecería que las partes extensas deberían estar en número finito. Galileo, sin embargo, va más allá: las partes extensas no son ni finitas ni infinitas, simplemente responden a cualquier número dado. Es decir, una extensión finita corresponde a un número, por ejemplo, a 1 metro y por tanto se dirá que tiene una parte; o puede tomarse la misma como asociada a otro número, 100, y habrá en ella cien partes extensas... El número de partes depende, por tanto, del número cualquiera elegido.

Primeras críticas y consecuencas. Esta paradoja base le resuelve a Galileo un problema y le permite establecer lo que considero el principio clave para la Jornada III, para poder constituir la Dinámica con las leyes del movimiento uniformemente acelerado. Pero, evidentemente, una cosa es lo que considere que ha obtenido Galileo y otra que lo haya conseguido de modo efectivo. Pero, simultáneamente hace surgir otros problemas, también intrínsecos al hacer matemático.

Por lo pronto debo señalar un hecho: en el razonamiento de Galileo se aprecia, por un lado, y simultáneamente, una total falta de rigor y un rigor total; y no me contradigo. La falta de rigor se aprecia en la falta de visión de la paradoja de la rueda, la falta de visión de que no hay tal paradoja si se entiende lo que es el desarrollo de la circunferencia y el rodamiento de la misma sin deslizamiento: ese rodamiento es una cicloide. Igualmente la negativa de Galileo al deslizamiento pero por identificar un número cualquiera de lados, pero siempre finitos y, por tanto extensos en su terminología, a una figura con un número de lados infinito por lo que tienen que ser intextensos. En el fondo, esa identificación, para ser consecuentes, debería hacerse con puntos. Identificación de lados con puntos que, claramente, es una falacia. Identificación, además, que atenta de modo total a uno de los principios básicos geométricos, el de homogeneidad, además de confundir el total en extensión con el total en intención o, en otras palabras, confundir el punto como límite de una división con el punto como elemento de la magnitud que se divide.

En segundo lugar, la falta de rigor se aprecia en el sentido de biyección que adopta Galileo entre la circunferencia y un segmento. Tal biyección se muestra imposible como la interpreta Galileo. Si esa biyección se realiza desde un punto de la circunferencia, el segmento tangente sería infinito y el punto de proyección carece de imagen. En el fondo se pretendería la rectificación de la circunferencia por proyección desde uno de sus puntos, y ello es imposible. Sólo tendría sentido si la biyección deja de ser tal y de lo que se trata es de la rectificación de la circunferencia con un segmento, entendido el acto único como corte de la circunferencia y aplicación sobre la recta. Pero ello no es ningún acto único que actualice nada.

Hay, a la vez, un rigor absoluto: apoyándose en lo perceptivo, pero intentando salir del mismo, Galileo adopta como principio:

> «identificación de la circunferencia con un polígono de infinitos lados inextensos».

Algo ya realizado antes, ciertamente; así, por parte de Kepler. Pero Galileo, en el fondo, no llega a esta identificación por un proceso de reiteración en la duplicación de los lados del polígono inscrito. Realmente, Galileo adopta esta identificación como punto de partida, como principio heurístico sobre el que hace girar todo su razonamiento. Y es aquí donde muestra su rigor a la vez que su astucia porque no lo presenta como tal principio, sino que parece llegar a él por un paso al límite inexistente, aunque aceptable para la razón. Y como la circunferencia posee un perímetro finito Galileo ha de admitir, forzosamente, y lo hace, que las partes inextensas, en su infinitud, tomadas juntas, den una extensión finita. Y es la clave para dar respuesta a la cuestión inicial: la clave para afirmar que toda magnitud extensa finita esté compuesta de infinitas partes no extensas o, lo que es equivalente, que una infinidad de partes no extensas pueda dar lugar a una extensión.

Partir de la identificación anterior y del principio (PM) conduce a una serie de problemas, que Galileo pretende superar mediante el planteamiento de otra serie de paradojas.

Paradoja de la escudilla

Al desarrollar dos circunferencias a lo largo de una tangente de la mayor, se observa que el centro de las mismas también se desplaza a lo largo de una línea paralela a tal tangente, la línea 00′. Conclusión inmediata es que el punto tiene un desarrollo igual a una línea, es decir, que el punto posee un número infinito de partes no extensas. Y es ciertamente paradójico realizar estas últimas afirmaciones.

Pero el rigor galileano, aquí, es total. Y aceptado el principio hay que aceptar las consecuencas. De aquí que busque otra paradoja en la que se repita el hecho anterior. Paradoja apoyada en una demostración matemática y, por tanto, rigurosa y necesaria. Galileo recurre a la paradoja de la escudilla. Pasa a demostrar

> «dos superficies iguales, y con ellas dos cuerpos también iguales que tengan por bases tales superficies, pueden disminuir continua, uniforme y simultáneamente, dejando restos siempre iguales entre sí, para llegar por fin, al término de sus igualdades perpetuas, a que uno de los sólidos y una de las superficies se reduzcan a una línea muy larga, mientras que el otro sólido y

la otra superficie se reduzcan a un solo punto; esto es, aquella a una infinidad de puntos y éstos a uno solo» (p. 73).

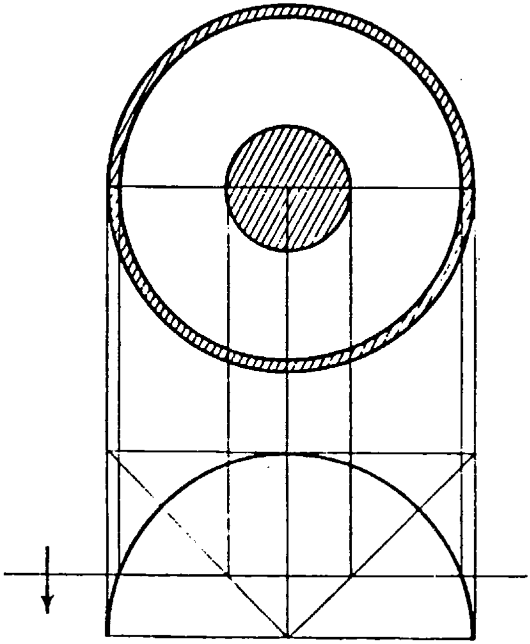
Es decir, no sólo un punto va a ser igual a una línea, sino que un sólido también va a ser igual a un punto, por un lado, y también a una línea...

En un cilindro se inscribe una semiesfera y un cono. Al «retirar» la semiesfera permanece una figura entre el cono y el cilindro que se denomina escudilla. En primer lugar, Galileo demuestra que el volumen de la escudilla y el del cono son iguales. A continuación pasa a establecer que si se corta por un plano paralelo a la base se obtiene un círculo como base de la escudilla, círculo que es igual, en área, a la base de la sección de cono obtenida: Y es proposición que se demuestra, igualmente, por lo que es consecuencia necesaria. En tercer lugar, se pasa a una transformación continua y uniforme: la sección se va elevando hasta alcanzar el plano de la semiesfera original y los volúmenes resultantes, cada vez más pequeños, se mantienen iguales entre sí. En el paso al límite, resulta que el círculo base de la escudilla se ha convertido en una circunferencia; y el círculo base del cono, en un punto.

Además, los dos sólidos, escudilla y cono, son iguales entre sí en cada paso, por lo que, en el límite, ambos sólidos seguirán siendo iguales, aunque uno se ha transformado en un punto y el otro en un círculo.

Por tanto, y siguiendo las conclusiones de tales razonamientos, se podrá, pues, decir que todas las circunferencias de los círculos, por muy desiguales que sean, pueden considerarse iguales entre sí, siendo cada una, a su vez, igual a un punto (p. 75).

Galileo no insiste. A esta paradoja le asigna un papel diferente a la que toma como base: hacer más plausible la anterior. Y lo realiza, curiosamente, mediante un proceso que, aparentemente, acentúa lo paradójico. Dirá «procuraré, ya que no puedo hacer más por el momento, disipar, o al menos atenuar, una improbabilidad por medio de otra parecida o mayor; así, a veces, una extrañeza desaparece ante un milagro» (p. 73).



Ahora bien, en esta paradoja se acentúa, precisamente, el papel demostrativo geométrico y ello a pesar de que las demostraciones, al estilo geométrico euclídeo, no son originales; incluso la parte correspondiente a la proporción de volúmenes la remite al libro de Luca Valerio *De centro gravitatis solidorum*. Si se recuerda el papel de necesidad de la demostración matemática, ello viene a significar, realmente, que hay que admitir estas proposiciones porque las impone la razón, el método que ésta maneja. Admitirlas aunque lo perceptivo, lo imaginativo no puedan seguir más que el proceso argumentativo, proceso del que insistirá, por boca de Sagredo,

> «me parece casi un sacrilegio arruinar una construcción tan bella, destruyéndola con algún ataque pedante» (p. 75).

Construcción tan bella matemáticamente porque para realizarla Galileo insistirá no sólo en el proceso geométrico demostrativo euclídeo, sino en el empleo de la transformación clave en toda su teoría, la metamorfosis, por lo que ataques contra el principio de homogeneidad quedan invalidados.

Paradojas del número de los números y de la unidad

a) En la paradoja base se presenta otra dificultad. De hecho las dos circunferencias concéntricas son distintas. Y Galileo ha mostrado que ambas pueden estimarse como compuestas por una infinidad de partes no extensas, de indivisibles. Si se mantiene el rigor eso significa que la mayor tendrá un número infinito mayor de indivisibles que el infinito de indivisibles de la menor. En otras palabras, tiene que haber distintos tipos de números infinitos, unos mayores que otros. Manteniendo el rigor, nuevo choque con el sentido común al tener que aceptar una escala ordenada de números infinitos.

Pero, aquí, Galileo prefiere mantener el sentido común; no se atreve a ser consecuente con la razón. Busca nuevas paradojas cuyo papel se centre, ahora, en eliminar la posibilidad de comparar números infinitos. El papel de las paradojas consiste en llegar a la consecuencia de que es improcedente otorgar los mismos atributos al infinito que a lo finito

> «puesto que creo que las propiedades de mayor, menor e igual no convienen a los infinitos de los que no se puede decir que uno es mayor, menor o igual a otro» (p. 78).

En otras palabras, la comparación entre números sólo tiene sentido en los terrenos de la finitud.

La paradoja se establece con el mismo método que el caso de las ruedas, con la biyección. Ahora, en lugar de figura geométrica, se realiza con números. Para ello Galileo observa que a cada número se le puede asociar, de modo único, su cuadrado; recíprocamente, cada cuadrado tiene un raíz única —sólo se admiten los naturales, no los enteros—. Se ha establecido la correspondencia

$$n \rightarrow n^2 \qquad\qquad n^2 \rightarrow n$$

Por lo cual puede afirmarse:

> «hay tantos números cuadrados como números, ya que son tantos como sus raíces, y raíces son todos los números» (p. 78).

Es correspondencia que choca con el hecho de que hay más números que cuadrados: basta contar los cuadrados que hay en los 100 primeros números naturales, que son 10; en proporción, la décima parte. En los diez mil primeros naturales, la proporción entre cuadrados y naturales pasa a ser de una centésima. Y la proporción, hoy se diría la densidad, seguirá disminuyendo si se aumenta el número de naturales elegido.

> «Con todo, en un número infinito, si pudiéramos concebirlo, habría que decir que hay tantos cuadrados como números en total» (p. 79).

Como primera consecuencia, la ya indicada: los infinitos no son comparables entre sí. Es decir, si hay números infinitos, si se llegara a concebirlos, entonces todos tendrían el mismo número: carece de sentido afirmar que uno es mayor que otro. De existir, el número infinito sería único. Como segunda consecuencia, apoyada precisamente en la densidad de los cuadrados —que se puede repetir para los cubos— se tiene el hecho de que tampoco se pueden comparar el número finito y el infinito, si es que el mismo existiera.

b) Con la equipolencia entre los números, sus cuadrados, sus cubos..., Galileo ha creído establecer la unicidad del número infinito. Es claro que, con ella, no ha demostrado su existencia. Existencia de infinito actual, se entiende. Y es claro que no ha llegado a la misma porque Galileo no maneja la definición por abstracción. Y aquí se encuentra uno de los motivos por los que Galileo no mantiene el rigor del método demostrativo y trata de apoyarse en la paradoja para evitar la comparabilidad de los infinitos; por principio, Galileo no admite la existencia del infinito actual, aunque parezca en algunos momentos lo contrario, sobre todo cuando utiliza el método biyectivo tanto en la rueda como en los números, aunque ya he indicado que tal manejo, en lo geométrico, es bastante dudoso. Parece partir del total distributivo de un conjunto, de los elementos de una figura. Y, para eliminar el infinito actual, llega a la afirmación paradójica de que el único número infinito es la unidad.

Para ello se apoya en una argumentación centrada en la densidad de los cuadrados, de los cubos, de las potencias en general. Ya he mencionado que la densidad va disminuyendo cuanto más nos alejamos en la escala de los naturales. Ello implica, para Galileo, un «alejarse del infinito» porque, según la paradoja anterior, el número de cuadrados tiene que ser igual al de números y resulta que cuanto más nos alejamos, cuantos más números tenemos, su densidad es menor —no dice que el número total de cuadrados es, sin embargo, mayor, con lo que se comete una falacia de pasar del número a su proporción—:

«De todo lo cual se infiere que, si volvemos hacia atrás (ya que tal ascensión nos va alejando cada vez más de la meta buscada), si algún número puede llamarse infinito, ése es la unidad. Y, de hecho, encontramos en el número uno todas las condiciones exigidas por el número infinito; a saber, contiene en sí tantos cuadrados y cubos como números naturales hay» (p. 83).

Las últimas palabras reafirman el método galileano: no basta una afirmación, hay que demostrarla. Y procura realizar dicha demostración apoyándose en el proceso siguiente:

a) La unidad es cuadrado, cubo, etc.; es decir, cualquier potencia de la unidad sigue siendo la unidad.

b) Entre dos cuadrados existe siempre una media proporcional. Entre x^2 y y^2 siempre existe xy como tal media: $x^2/xy=xy/y^2$.

c) Entre 1 y cualquier otro cuadrado existe, siempre, una media proporcional: $1/xx=xx/x^2$.

d) Por consiguiente, 1 cumple la propiedad de los números cuadrados. De aquí que 1 sea un número cuadrado.

A continuación se repite el rezonamiento con los cubos, que satisfacen la propiedad de que entre dos cubos cualesquiera siempre existen dos medias proporcionales. Y se obtiene la conclusión de que 1 es un número cubo. Podría reiterarse el razonamiento y llegar a la propuesta final de que 1 es todas las potencias... Pero esta es la propiedad que Galileo asigna al número infinito. De aquí, que triunfante, Galileo afirme:

«Concluyamos, por tanto, que el único número infinito es la unidad» (p. 83).

La combinación de la equipolencia y la densidad, así como la atribución a los cuadrados y a los cubos de sólo una propiedad, conduce a la afirmación de la unicidad del infinito y de que el único número infinito es la unidad. Ello implica, desde una perspectiva matemática, el explícito rechazo del infinito actual, aunque es de este rechazo del que en el fondo parte Galileo para su propia construcción.

Y hay que observar que, en esta paradoja, la unidad cobra el mismo papel que tenía el punto en la paradoja de la escudilla: contener en sí la infinidad de indivisibles, contener en sí la infinidad de las potencias.

El papel de los métodos

Hasta aquí he tratado de exponer, sin apenas crítica, el papel intrínseco al hacer matemático que Galileo hace jugar a las paradojas: Pero estas paradojas van ligadas íntimamente a unos métodos, a unos instrumentos matemáticos de los cuales, precisamente, surgen. Es imprescindible, por ello, detenerse en el papel que tales métodos juegan además de ser los originadores de las paradojas.

1. *La biyección*

La correspondencia biyectiva se utiliza en dos enfoques diferentes:

Por un lado, para establecer la equipolencia entre los números y su cuadrados, cubos; para establecer que dos circunferencias y sus desarrollos son, los cuatro, equipolentes entre sí. En ambos casos, la aplicación se realiza considerando los conjuntos en extensión distributiva, es decir, elemento a elemento. Parece suponer, en principio, un enfoque conjuntista. Sin embargo, Galileo no da el salto conceptual que ese enfoque conlleva: la aceptación de tales conjuntos como dados en acto en cuanto a la infinitud de sus miembros. Y que no lo hace se observa en el papel que, desde este enfoque, hace jugar al método biyectivo: utilizarlo como un instrumento que conduce a una reducción al absurdo. Quiero decir, maneja la biyección precisamente para rechazar el dato que la misma exigiría, el dato de que los conjuntos entre los que la biyección se establece puedan darse globalmente, en acto; porque al establecer la correspondencia, Galileo pretende alcanzar lo que estima como una contradicción.

Sin embargo, el método biyectivo supone aceptar el dato de los conjuntos inicial y final siendo posible que, en alguna ocasión, alcance la paradoja, pero lo que no cabe es el empleo, consciente, de su utilización para obtener, como sea, dicha contradicción. Y ésta lo es no por el método en sí, sino porque choca, fundamentalmente, con el supuesto inicial y éste viene dado no por lo conceptual sino por lo perceptivo y lo simbólico. La paradoja lo es desde lo perceptivo. En los terrenos puramente conceptuales la misma no existe como mostraría Cantor posteriormente. En lo conceptual, el rechazo de la contradicción se debe a que ha existido un salto epistemológico por el cual se admite la correspondencia pero entre dos conjuntos base aceptados como dato primario. Enfoque global, no particular, en el hacer matemático que sólo a fines del s. XIX se llega a establecer, tras la inversión epistemológica que se produce en los alrededores de 1872. Pero ello supone igualmente una ruptura definitiva entre lo fenoménico y lo conceptual puro, ruptura que Galileo intenta establecer pero que no llega a consumar.

El segundo enfoque es el ya mencionado de constitución de un acto único por el cual se actualiza la infinidad de indivisibles. Pero la correspondencia vuelve a hacerse elemento a elemento, mediante el desarrollo de la circunferencia sobre la recta. Y ello porque tal biyección, circunferencia $\leftrightarrow$ recta, no existe. A los puntos que ya señalé, agrego que si la proyección se realiza desde el centro, la circunferencia se convertiría en otra circunferencia de radio finito o infinito; si desde un punto sobre la circunferencia, en una recta infinita careciendo de imagen el punto de proyección. Y Galileo no pretende, en manera alguna, esa salida. Y aunque insista en el acto único, lo que se obtiene según las palabras de Galileo, no es tal proyección puntual, sino una correspondencia reiterada de cada punto de la circunferencia sobre una recta sobre la que rueda, pero cambiando en cada momento dicho punto y, por tanto, dicha proyección. Y esto no es, en manera alguna, una biyección.

Hay que observar que la biyección va a ser manejada en el s. XVII en los terrenos geométricos fundamentalmente, pero en el campo proyectivo. No ya como biyección, sino como proyección de una figura en otra. Y es lo que harán Desargues y Pascal. Proyección y sección como claves, pero sin alcanzar el dato primario de que las figuras entre las que se realiza dicha proyección sean conjuntos de objetos de naturaleza cualesquiera. Ya he mencionado que esto sólo se conseguirá muy avanzado el s. XIX.

2. *La transformación continua y uniforme*

Es un método que surge entre los pintores, en la geometría perspectiva y que se hará clave para la geometría proyectiva arguesiana: En esta transformación, a la que hace referencia básicamente en el proceso de la paradoja de la escudilla, se incluye el de sustituir cantidades iguales a cantidades iguales, manteniéndose el resultado. Es una transformación que posibilita, mediante una homotecia, pasar de figuras de extensión muy reducida, a figuras de extensión todo lo grande que se quiera, y recíprocamente, manteniendo la forma. Es por lo que Galileo llega a afirmar que todo razonamiento que puede hacerse sobre la forma de la Tierra y sus dimensiones, cabe ampliarlo a todo el orbe, a todo el universo. Pero en el empleo de esta transformación hay que observar:

a) Para que la transformación sea continua y uniforme, el espacio en el que se realice ha de ser uniforme; es decir, este tipo de transformación sólo cabe establecerlo en un espacio geométrico, no fenoménico. Y geométrico que cumpla, además, algunas propiedades invariantes, como las de homogeneidad, ilimitación..., así como las de invariancia topológica lo que, evidentemente, no ocurre en lo fenoménico. Manejar, por consiguiente, este tipo de correspondencia entraña la admisión, implícita, ciertamente, de que el espacio manejado sea, al menos, preeuclídeo.

b) La transformación no tiene por qué ser conforme. Como Kepler manejó y mostró Desargues, este tipo de transformación falla respecto a la condición de invariancia de forma. Así, Desargues, aceptando el enfoque proyectivo, mediante la transformación continua y uniforme va convirtiendo una figura como la circunferencia en otra como la elipse, la parábola, la hipérbola, la recta. Cónicas equivalentes entre sí desde lo proyectivo pero, evidentemente, no conformes respecto a una métrica. Manejar la correspondencia continua implica aceptar la transformación de las figuras en ciertos aspectos apareciendo como equivalentes en otros. No hay, por ello, factor de identidad absoluta sino relativa al tipo de relación o propiedad que se establezca a priori.

3. *La metamorfosis*

Galileo no llega, sin embargo, a estas últimas consecuencias. Para él, las propiedades básicas son las métricas y no encuentro que considere otras, como las proyectivas o las topológicas. De aquí que una transformación de dos figuras, equivalentes proyectivamente como la circunferencia y la recta, se le muestre como una auténtica ruptura porque ambas carecen de métrica común. Pero ello le conduce a diferenciar la transformación continua y uniforme, estimada únicamente en el aspecto conforme, de la transformación que calificará de metamorfosis. Galileo observa que el paso al límite, el paso de lo finito a lo infinito entraña la ruptura de la forma. Este paso es obligado no sólo para manejar lo indivisible y el infinito, sino por el propio método de transformación. El paso al infinito cambia la forma de la figura considerada, no mantiene sus propiedades métricas, lo cual supone, para Galileo, una auténtica metamorfosis.

Y Galileo insistirá una y otra vez en este aspecto, en esta transformación. Lo hará, realmente, eje de sus consideraciones. Y lo hace retomando la afirmación de Kepler: un polígono, cuando se realiza una transformación continua y uniforme de duplicación de sus lados se mantiene como tal polígono; pero cuando se da el paso al límite, al infinito, entonces se produce una metamorfosis y el polígono se convierte en una circunferencia. Esta metamorfosis hace que una magnitud extensa —el lado del polígono— se transforme en una magnitud no extensa, en un indivisible —el «lado» de la circunferencia—, sin que por ello exista vacío alguno entre sus partes.

Y en defensa de esta transformación Galileo acude a la paradoja de la escudilla donde el salto se produce al introducir el infinito en la transformación continua y uniforme: el sólido se transforma en un punto, la circunferencia en un punto o en otra circunferencia que excede cualquier dimensión.

La paradoja de los números viene a mostrarse, nuevamente, como ejemplificadora de esta transformación: el número, al pasar a lo infinito, se hace la unidad.

Por si estos casos no bastaran, Galileo busca una demostración geométrica para avalar, mediante la necesidad que la misma comporta, la aceptación de la metamorfosis. Demuestra el teorema:

> «Dada una línea recta AB y un punto C en ella que la divide en dos partes desiguales. Si desde los extremos A y B se trazan líneas pares que se encuentran en la misma proporción que los segmentos AC y BC, estas rectas se cortan en un punto y el lugar de tales puntos, entre los cuales se encuentra C, es una circunferencia. Si C se mueve en el segmento AB la circunferencia correspondiente variará de tamaño y, cuando C se aproxime a B se hará muy pequeña, mientras que si C se aproxima al punto medio 0 de AB la circunferencia se irá haciendo cada vez mayor».

Consecuencia de este teorema es que si C se sitúa en B —un paso al límite— la circunferencia se convierte en un punto y si se sitúa en 0 —otro paso al límite— se transforma en una recta, la recta perpendicular a AB por 0, con 0=C. En otras palabras, la transformación por metamorfosis se produce en el salto de lo finito a lo infinito, en el momento límite.

> «Considerad ahora cuál es la diferencia entre un círculo finito y otro infinito: este último cambia de tal forma su esencia que pierde totalmente su ser y su poder ser, ya que nosotros entendemos con claridad que no puede darse un círculo infinito» (p. 85).

El argumento es válido para la esfera —basta realizar un giro de 360° alrededor de la recta AB— y Galileo lo generaliza para cualquier otro tipo de superficie, por lo que en paralelo a lo que «entendemos con claridad» para la no existencia de la circunferencia infinita, tampoco existirá una esfera infinita, ni superficie ni cuerpo infinito. Es la misma conclusión, ahora geométrica, a la que llegaba la paradoja de los números: no hay diferentes números infinitos sino sólo la unidad; ahora, no hay cuerpos infinitos, sino sólo el punto.

Manejar la transformación por metamorfosis significa aceptar que los cuerpos, al pasar al infinito, cambian de forma. Y en este cambio lo que se obtiene, realmente, no es la existencia de cuerpos infinitos, sino la manifestación, en ellos, de sus primeros componentes, de los indivisibles que los constituyen, de sus partes no extensas. El polígono o la recta se transforma en una circunferencia que manifiesta, en sí, la totalidad de sus indivisibles, de sus partes no extensas, como totalidad de sus lados; y lo hace en unidad porque la unidad es el único elemento que puede estimarse como infinito.

En resumen

Esquemáticamente puede resumirse el papel que Galileo hace jugar tanto a las paradojas como a los métodos de los que las mismas surgen, afirmando que ambos aseguran que un continuo está compuesto de infinitas partes no extensas, de indivisibles, y que esta infinidad sólo puede manifestarse mediante una transformación de metamorfosis que, entrañando un paso de lo finito a lo infinito, hace variar la forma del cuerpo mostrando, simultáneamente, su propia composición. Variación sustancial de forma que, sin embargo, se mantiene en la unidad de su total, dado que el 1, o el punto, es el único número —figura— infinito. Y esa unidad simboliza y representa la unidad de las infinitas partículas indivisibles, de las partes no extensas que constituyen la figura o el cuerpo continuo. Por su lado, la parte extensa del mismo representa la capacidad de asociar a la extensión un número, una medida, siempre finitos y dependiendo, en cada ocasión, de la unidad de medida elegida.

Dificultades, Críticas

Es evidente que las argumentaciones de Galileo son, en muchos casos, sorprendentes desde lo conceptual puro, porque en su ruptura, Galileo permanece anclado en muchos momentos en lo estrictamente simbólico. Ya he indicado, haciendo camino, la presencia-ausencia de rigor y algunas críticas. Galileo es consciente de las dificultades del terreno matemático que pisa. Y ello porque está, según afirma, entre los indivisibles y los infinitos, y los maneja una mente finita y la naturaleza de ambos no tiene ningún parecido (p. 83). Ironía cartesiana, a pesar de estas advertencias, Galileo maneja el infinito sin reparo alguno...

Es claro que si se admite el infinito actual, así como los procesos de globalización, las paradojas de Galileo dejan de serlo y simplemente cabría hacer la objeción de que no había mantenido el rigor necesario. Sería una crítica injusta: en Galileo hay imposibilidad epistemológico-ontológica para alcanzar el proceso de globalización y, con él, la potencia del método biyectivo, así como de las definiciones por abstracción. Es interesante observar que Descartes, en la crítica que realizó página a página de los *Discorsi* en su carta a Mersenne de 10 de octubre de 1638, crítica implacable por otro lado, tampoco alcanzó a ver ni siquiera la existencia del carácter biyectivo de la aplicación entre las dos ruedas y sus desarrollos en la Paradoja base. No la vio porque tampoco podía verla y por las mismas razones que en el caso Galileo. Se requería la admisión de un ambiente epistemológico-ontológico distinto, sólo factible en el s. XIX.

Y bastaría recordar que este tipo de paradojas eran conocidas y discutidas, sin dar el salto objetual que podrían implicar, desde los tiempos de la escolástica. Basta mencionar las paradojas establecidas por Scoto y el hecho de que en todo tratado escolástico este tipo de paradojas sea ampliamente discutido. Lo importante en Galileo es que las mismas posibilitan la admisión de los indivisibles como método, ahora conceptual, en el interior de la Matemática, aunque no dé el salto hacia la admisión del infinito actual, subyacente a estas paradojas.

Lo que sí cabe criticar es la adopción que hace Galileo de la metamorfosis y su papel central en cuanto a las interpretaciones. Galileo sólo estima como propiedades invariantes del espacio las relacionadas con la propiedad conforme, propiedades métricas por modo exclusivo. Y en el espacio conceptual que se maneja también entran las propiedades proyectivas como ponen de manifiesto Desargues y Pascal. Con ello la metamorfosis puede ser aceptada, pero no como propiedad de ruptura, sino de invariancia proyectiva. Ciertamente no métrica. Ello implicaría el abandono de gran parte de las ideas galileanas y, fundamentalmente, de sus implicaciones simbólicas.

En cuanto a críticas más tradicionales cabe considerar las realizadas en cuanto al manejo de los indivisibles. La más clásica, la de saltarse un principio como el de homogeneidad del espacio, apuntada desde Cavalieri a Descartes. Es acertada pero sólo en parte de la argumentación galileana: aquella en la que pretende superar la dificultad del argumento del deslizamiento de la rueda pequeña. Y ya me referí en su lugar a esta crítica. En los demás puntos, parecería una crítica «pedante», para emplear el mismo término galileano: y ello por la identificación de un punto como elemento de una extensión y un punto como límite de una división. Es claro que las líneas carecen de superficie por lo que la unión o suma de las mismas no podrá dar, jamás, una extensión; análogo respecto a los puntos y a la línea de la que forman parte: es el gran problema del método de indivisibles. Es el ataque de clásicos como Tacquet y Laloure hacen a los que manejan este método, a los Roberval, Pascal, Barrow... Hablar de suma de indivisibles es atentar contra el principio de homogeneidad del espacio. Pero es crítica que no afecta, desde mi punto de vista, a Galileo. Y ello porque Galileo no habla de la suma de partes no extensas que den una extensión del mismo tipo que la figura inicial salvo en su distinción de magnitudes. Lo que hace es considerar a los indivisibles como componentes de las figuras que sólo se manifiestan no mediante sumas sino mediante transformación por biyección y metamorfosis. La metamorfosis, al pasar de lo finito o lo infinito, altera el «ser y el poder ser», altera sustancialmente el estado de la figura, del cuerpo dado. Por ello no hay principio de homogeneidad que valga; se ha transformado el elemento sustancialmente, por lo que deja de tener sentido lo que puede tenerlo en lo finito.

Es evidente que, desde este punto de vista, Galileo jamás podría alcanzar una concepción intrínsecamente matemática como la de sumación de indivisibles, concepción propia de los fundadores del Análisis matemático. Conceptualmente, la interpretación que hace de la metamorfosis impide la cristalización de un cálculo, auténtico, de indivisibles, con todas las dificultades incorporadas que el mismo pueda tener. Pero, al no hacer sumación, Galileo ha de mantener como método matemático, el de la proporcionalidad. Y es este método el que manejará una y otra vez, incluso para tratar de la densidad de las potencias. Es el que le conducirá a las demostraciones de la Jornada III en el establecimiento de las leyes del movimiento, puras estructuras proporcionales. En el fondo, la metamorfosis va a reflejar esa misma proporcionalidad y la ausencia de la misma en el paso al infinito.

Pero son los matemáticos franceses, contemporáneos a Galileo, los que van a dirigir sus más duras críticas a los *Discorsi*. La acusación, completa: Galileo no ha entendido nada del problema subyacente a la paradoja de Aristóteles. Porque el problema matemático se centraba no en ver si un segmento tenía partes extensas o inextensas; se centraba en obtener la trayectoria de un punto de la rueda al rodar ésta sin deslizamiento a lo largo de una de sus tangentes. Problema vivo en los medios franceses gracias a Mersenne que, como ya he indicado, se lo plantea a Galileo en 1627 y a Roberval. Este, en 1634, muestra que dicha trayectoria es la trocoide, ruleta o cicloide, mientras que la trayectoria del punto interior, de la rueda pequeña, es una trocoide acortada. No es un arco de elipse o de espiral como pensaba Mersenne. Este envía el resultado de Roberval a Galileo. Y, con ello, indicaba que si la rueda pequeña, cualquiera de sus puntos, describe una trocoide o ruleta, entonces no cabe hablar de espacios vacíos en su desarrollo ni que el mismo es una línea paralela a la tangente de la rueda mayor. Con lo cual, desde al menos 1634, se tenía ya una crítica a la obra entera galileana: la de que no vio, ni quiso ver, lo que debía ver y se confundió radicalmente, llegando en su complicación, a hablar de partes vacías y partes llenas de una línea continua. Torricelli llegó a contar al propio Roberval, en 1647:

> «Galileo ignoró siempre la figura de esta curva» (Auger, p. 170).

Curiosamente, en la crítica que he mencionado de Descartes, éste tampoco lo ve. Sus palabras:

> «Y lo que dice para probar la existencia de esos pequeños espacios es un sofisma, porque el exágono que considera no produce espacios vacíos en el intervalo a través del cual pasa, sino que sus partes se mueven continuamente a lo largo de líneas que llenan un área y no se mueven en una línea recta como parece sugerir» (A.T. X, p. 381).

Se ha interpretado esta afirmación cartesiana en el sentido de que, en el límite, el punto recorre una cicloide. Lo que, con Costabel, no creo que sea correcto. Lo que afirma Descartes es que los puntos del polígono, en su movimiento, producen una banda curvilínea con un área que se va haciendo más pequeña al aumentar el número de lados. Al producir una banda no pueden existir espacios vacíos y, menos, puntos. No hay, por tanto, posibilidad de biyección porque iría, igualmente, contra el principio de homogeneidad: línea-superficie.

La crítica cartesiana es correcta, en otro sentido, en el experimental o experiencial. Y ello porque la rotación de los polígonos se puede comprobar de modo experiencial y al hacerlo se observa la existencia de dicha banda. Crítica que iría, por otro lado, contra la ausencia de experimentos en Galileo, ausencia que le conduce a visiones erróneas y, consecuentemente, a realizar argumentaciones cuanto menos engañosas, así como contra toda concepción de percepción de hechos, desnuda. Y esto sí va en la misma línea de afirmar que Galileo tampoco vio la trayectoria que debería haber visto, en el caso de la circunferencia, la cicloide o ruleta.

Pero si se sigue la paradoja base, consecuencia de no ver lo que se tiene que ver, hay que observar que, en ella, se mantiene un problema que quedó oculto para Galileo, como también lo quedará para Descartes. El problema al que me he referido de la medida de una circunferencia respecto a su desarrollo, es decir, el problema de la rectificación de la circunferencia. El método biyectivo es impotente para producir una métrica satisfactoria con la que obtener dicha rectificación. Y no puede olvidarse que esta era una de las cuestiones planteadas por Mersenne a Galileo. Creo que ya he indicado las dificultades a las que esta biyección conduce y que la imposibilitan como método para obtener la solución a este problema. Galileo lo pretende mediante la composición de la línea continua en partes extensas e inextensas, un preludio de admisión de que la recta sea isomorfa a un cuerpo no arquimediano, extensión del cuerpo de los reales. Descartes pasa en silencio ante este problema, finalmente resuelto por Pascal.

Lo que sí cabe afirmar, con Descartes, es que Galileo realiza un sofisma en la paradoja de los números, al identificar 1 con el número infinito. Lo que Galileo afirma es que cualquier potencia de la unidad sigue siendo la unidad, por un lado; por otro, que el 1 posee *todas* las propiedades de cualquier potencia y se detiene en comprobar que es un cuadrado porque entre dos cuadrados cualesquiera hay, siempre, una media proporcional. Pero ésta es sólo una de las propiedades de los cuadrados, no todas. Y lo mismo respecto a los cubos. Por otro lado, y siguiendo a Descartes, 1 es todas las potencias de 1 y sólo de ellas, pero el número infinito contendría, en principio, las potencias de *todos* los números. De aquí que esta paradoja sea verbal, no real.

b) *Papel extrínseco*

La admisión de indivisibles e infinitos va a jugar, en Galileo, dos papeles esenciales en cuanto al enfoque cognoscitivo de la fisis, de la naturaleza. Dos papeles que se agregan a los papeles intrínsecos, puramente matemáticos de los mismos y que, en ocasiones, realmente condicionan este último papel. Y ello porque el manejo de los indivisibles y el infinito no es estrictamente matemático y es lo que justificaría la negativa de Galileo a no ver que la trayectoria de un punto de la circunferencia es una cicloide. Ver tal trayectoria implicaría el desmoronamiento de gran parte de sus argumentaciones y le implicaría la imposibilidad de aplicación a la explicación de la naturaleza.

Y estos dos papeles que los indivisibles juegan en el pensamiento de Galileo, extrínsecos al propio hacer matemático, se mueven en dos planos diferentes: Simbólico y Físico.

Papel simbólico porque Galileo maneja, a lo largo de las paradojas, términos casi religiosos. La metamorfosis no sólo hace variar la forma, sino que transustancia las figuras, que se mantienen en unidad porque la unidad es el único número infinito que contiene en sí a todos los demás. Esta metamorfosis se aproxima al milagro, término que emplea Galileo, al hacer que la circunferencia sea idéntica a un punto o pueda convertirse en una recta y, sobre todo, se observa la imposibilidad de que los atributos finitos puedan ser mantenidos al manejar el infinito. Quienes intenten pensar sobre el infinito manejando tales atributos, cometen errores. Y he recordado cómo Galileo, a pesar de todo, intenta una cierta prudencia porque viene a admitir que los objetos están compuestos de indivisibles, doctrina condenada por herética. Se está, por tanto, bordeando temas doctrinales religiosos. De aquí que la mínima interpretación que cabe realizar de las constantes alusiones a estas metamorfosis, a la incapacidad de razonar con atributos finitos sobre el infinito, a la distinta naturaleza de lo finito y lo infinito, sea la de que Galileo está afirmando una separación entre lo religioso y lo conceptual, al menos. Y ello porque, pese a la prudencia galileana, el rigor matemático le conduce a la aceptación de las partes inextensas, indivisibles, como constituyentes de las figuras. Intento de rigor que pretende mantener en cuanto a la transformación de metamorfosis. Cabría pensar que Galileo, en este terreno, hace jugar a los indivisibles un papel de separador de lo religioso y lo conceptual, aunque el mismo Galileo quede prisionero, en muchas ocasiones, de lo estrictamente simbólico.

Podría irse más allá, incluso, subrayando las alusiones a los orbes, a la ilimitación de los mismos y a la identificación del punto con la circunferencia o la esfera inmensa, abarcadora del cosmos. Identificación que podría asumirse como estrictamente simbólica entre el hombre, como punto, y el total del universo. Tema sobre el que Pascal ha sido, ciertamente, más explícito pero en una acepción más estrictamente antropológica.

Junto a este papel entre simbólico y diferenciador entre lo religioso y lo conceptual, Galileo hace jugar a los indivisibles y los infinitos el *papel físico* que, de modo tradicional, se les atribuye de modo exclusivo. En lo fenoménico sólo se puede conjeturar o dar una mera descripción de algo muy concreto, particualr; en lo matemático, al tratar con unos métodos intrínsecos al hacer matemático y realizar unas demostraciones con su carácter de necesidad, ha creído poder demostrar la existencia de las partes no extensas como primeros principios constitutivos de las figuras, de los cuerpos. Con ello Galileo ha empleado lo que denominé primer principio constitutivo del conocimiento. Pero ahora hace uso del segundo principio, aquél que aseguraba que lo fenoménico está construido de acuerdo a leyes matemáticas, y de aquí la adecuación de lo explicativo conceptual con lo fenoménico —salvo pequeños retoques prácticos—. Y este segundo principio lo aplica en el caso de la primera ciencia nueva y da por sentado, aquí, que no sólo las figuras matemáticas, sino los cuerpos materiales están compuestos de indivisibles, de partes inextensas junto a las extensas; composición en cuanto a la posibilidad de su conocimiento. Igual que en la figura matemática, la parte extensa sirve para la medición, para la cuantificación, pero las partes inextensas, los indivisibles sirven para la explicación de los diversos fenómenos físicos.

Esta constitución en partes no extensas implica, de modo inmediato, la explicación del primer problema físico que se había planteado: el de la resistencia de los cuerpos a la fractura, con la cohesión entre las partes correspondientes: los indivisibles hacen el papel de ventosas. Sin partes vacías entre sí, permiten explicar la cohesión de los cuerpos, su impenetrabilidad.

Es claro que este tipo de justificación supone una inversión epistemológica radical respecto al modelo explicativo tradicional, más ligado al sentido común. Ya he reiterado que estriba en explicar lo más conocido por lo más desconocido. Consecuencia de la aceptación de los dos principios epistemológico-ontológicos mencionados. Y este nuevo enfoque epistemológico no sólo posibilita dar cuenta de la razón de la cohesión de las partes sino que permite

> «comprender en qué consisten la rarefacción y la condensación, sin caer, por aquélla, en el inconveniente de tener que admitir espacios vacíos y, por ésta, en la penetrabilidad de los cuerpos. Todos estos escollos pienso que podrían evitarse bastante bien si se admite la composición, que hemos expuesto, a base de indivisibles» (p. 93).

Y una vuelta a la paradoja de la rueda es la que permite la explicación del segundo problema de la nueva ciencia: la rarefacción y condensación. Muy esquemáticamente, basta observar que si se materializan ambas ruedas y se suponen rodeadas por una cuerda cada una, al desarrollar por la menor, la cuerda de la mayor queda floja. Naturalmente, como poseen los mismos indivisibles, ello supone que éstos se han expandido y, por consiguiente, tales partes no extensas vienen a explicar la dilatación. Pero si se desarrollan las dos ruedas siguiendo la cuerda de la mayor, resulta que la menor se tiene que estirar. Las partes no extensas tienen, en este último caso, el papel de dar razón de la condensación que se ha producido al convertirse la mayor en la menor antes del estiramiento. Los indivisibles son, por lo tanto, los últimos responsables del estiramiento y encogimiento de los cuerpos, sin acudir a teorías «conjeturales» como las del vacío o la penetrabilidad por materia más o menos sutil.

Los indivisibles y el método de la metamorfosis también permiten explicar el tercer problema físico de esta primera nueva ciencia: el estado de los cuerpos y el paso de uno de los estados a otro. Por lo pronto los fluidos son tales porque están reducidos a la infinitud de sus indivisibles (p. 85). Y ello es así porque jamás podrá obtenerse una parte extensa de tal fluido como componente del mismo, lo que sí ocurre si se desmenuza un sólido como el oro, donde cada partícula sigue siendo una parte extensa, por mínima que sea. Estos indivisibles que constituyen los fluidos carecen de forma y extensión, carecen de parte extensa alguna. A pesar de lo cual constituyen una unidad, establecida por el recipiente en el que se encuentra, dado que la unidad es el único número infinito que abarca en sí cualquier otro elemento.

Como un cuerpo, si está en estado sólido, por mucho que se lo divida, siempre mantendrá, en esa división, partículas extensas, con forma determinada, la diferencia entre los estados sólido y fluido viene explicada, precisamente, por la existencia en acto de las partes no extensas. Estas permiten dar cuenta, igualmente, del paso de un estado al otro, ya que una metamorfosis, dada en la práctica por el calentamiento de una llama por ejemplo, hace que los indivisibles se separen aún más llegando a transformarse en otro estado; del líquido, al gaseoso; del sólido, al líquido. La forma, en este paso, en esta transformación, se altera, así como las cualidades de los cuerpos porque lo que se tiene es una auténtica transformación en la que el cuerpo cambia de ser y de poder ser.

Los tres problemas cuya respuesta constituía la elaboración de la primera ciencia, obtenida mediante consideraciones y demostraciones matemáticas, quedan, así, resueltos. De dónde procede la resistencia de los cuerpos a la fractura; cómo explicar la condensación y la rarefacción; cómo dar cuenta de los estados en los que se encuentra la materia y, a la vez, cómo explicar el paso de uno a otro estado. Los tres, explicados mediante un intento de matematismo integral, absoluto. Y ello a través de la admisión de los indivisibles como partes no extensas y de los métodos de biyección y metamorfosis, junto a los métodos demostrativos clásicos, donde la proporcionalidad juega el papel esencial. Pero también es evidente que esta primera ciencia nueva tampoco pasa por el experimento; es imposible. Y si el experimento es, aquí, imposible, la única salida se centra en la razón. No en la razón conjetural, afirmará Galileo, sino en la razón matemática.

Es evidente que Galileo es consciente de los problemas que entraña la aceptación de los dos principios epistemológicos. Su combinación convierte sus explicaciones en imposibles físicos. Pero es un punto en el que es tajante:

> «Si lo que he expuesto es de vuestro agrado, tenedlo en cuenta; y si no, reputad la cosa vana, lo mismo que todo lo que yo he dicho, e id a buscar de otro una explicación más tranquilizante para vuestro entendimiento. Insisto solamente en estas dos palabras: nos encontramos entre los infinitos y los indivisibles» (p. 96).

En diálogo, como transcurren los *Discorsi*, unas afirmaciones como las anteriores cortarían toda posibilidad de seguir. Y Galileo, en gracia al estilo, continúa y hace poner en boca de Simplicio las críticas tradicionales: las consideraciones realizadas son, ciertamente, muy bellas, pero abstractas por ser matemáticas y sin relación alguna con la experiencia, con lo fenoménico.

> «Las consideraciones y demostraciones que nos habéis presentado son cosas matemáticas, abstractas y separadas de la materia sensible, me parece que aplicadas a las sustancias físicas y materiales, tampoco habrían de conformarse a vuestros principios» (p. 96).

En búsqueda de justificaciones, Galileo acude a experiencias sabiendo que, en ellas, jamás encontrará otra cosa que una mera plausibilidad para aceptar la nueva ciencia. Busca tipos de experimentos que den idea de cómo podría obtenerse, en ellos, el paso al límite, la metamorfosis. Y tiene que reconocer, una vez más, que «allí, sin embargo, donde la experiencia se revela impotente, hemos de recurrir a la razón» (p. 105).

Para, inmediatamente, volver a la misma afirmación, tajante:

> «Por eso os pido que o bien aceptéis los inconvenientes reseñados, o bien estéis de acuerdo con mis argumentaciones o bien encontréis otras más pertinentes» (p. 105).

PARA FINALIZAR

La primera ciencia nueva se articula, como creo haber mostrado, en función de dos principios básicos y que, en su combinación, van a mostrarse claves de lo que se denominará «revolución científica». La estructura de la Jornada I, que establece la primera ciencia nueva galileana, es total y gira en torno a esos dos principios como ejes. Permite, además, establecer los métodos que Galileo utilizará en las Jornadas siguientes, donde establecerá la ciencia del movimiento. La composición de grados de velocidad, y los indivisibles, así, se muestran como los elementos base para el establecimiento de las proposiciones entre las distintas magnitudes.

Con ello, esos indivisibles dejan de ser el tema de discusión por el cual podría rechazarse el infinito para pasar a convertirse en elementos conceptuales, no simbólicos, no naturales o empíricos, no comerciales. Elementos conceptuales desde los cuales puede darse cuenta de cualquier nueva ciencia, es decir, de cualquier conocimiento acerca de la fisis, de la naturaleza.

JAVIER DE LORENZO

BIBLIOGRAFIA

Auger, L.: *Un savant méconnu: G. P. de Roberval* (Blanchard, París 1962).

Ballew, D. W.: 'The Wheel of Aristotle', *The Mathematics Teacher* (oct. 1972) pp. 507-9.

Costabel, P.: 'The Wheel of Aristotle and French consideration of Galileo's Arguments', *The Mathematics Teacher* (mayo 1968) pp. 527-34.

Descartes, R.: *Oeuvres de* (Ed. Adam-Tannery) II, pp. 379-405; X, 568-572.

Feher, M.: 'Las encrucijadas de la matematización de la naturaleza en el s. XVII', *Sylva Clius*, n.° 4 (abril 1988) pp. 3-13.

Galileo: 1 *El ensayador* (1624). Trad. Intr. y notas de J. M. Revuelta (Ed. Aguilar, Buenos Aires 1981).

— 2 *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos ciencias nuevas* (1638). Ed. C. Solís y J. Sádaba (Ed. Nacional, Madrid 1976). (Las citas, en el texto, se han realizado por esta traducción, aunque la paginación se hace correspondiendo a la Edizione Nazionale de Favero, Firenze).

— 3 *La Nueva ciencia del movimiento.* Selección de los *Discorsi*, intr., trad., notas y apéndices de C. Azcárate, García Doncel y J. Romo (Ed. Univ. Autónoma de Barcelona, Barcelona 1988).

Lorenzo, J. de: 'Galileo, la búsqueda de la verdad', *Estudios sobre historia de la Ciencia y de la Técnica*, vol. I (Valladolid 1988) pp. 67-83.

Renou, X.: *L'infini aux limites du calcul. Anaximandre, Platon, Galilée* (Ed. Maspero, París 1978).