Estudios Filosóficos, 125 (1995) 35-65

Derivación formal: Análisis crítico

El concepto de derivación formal es, desde el sentir de los lógicos, el que capta el contenido esencial lógico de la práctica matemática. En este ensayo se estudia la estructura y las funciones asignadas a la derivación formal; se realiza un análisis crítico de las componentes definicionales y de los supuestos en que se apoya: se analizan los compromisos epistemológicos, antropológicos y metodológicos que subyacen al concepto de derivación formal. Una primera consecuencia de este análisis es que la noción de derivación no capta el contenido esencial epistémico de la práctica matemática.

Tras los trabajos de Frege, de Peano... surge una noción de derivación o demostración que cristaliza en los entornos de los años treinta con Hilbert y su escuela, con Tarski... Noción de derivación formal que, por la crítica de Frege a los matemáticos, por su aceptación por el logicismo y el neopositivismo, por su manejo en el Programa de Hilbert, se convierte en concepto normativo para el hacer matemático a lo largo de este siglo a pesar de las primeras críticas de Poincaré y, posteriormente, de los intuicionistas.

La apuesta de Quine por una epistemología naturalizada, el papel de las demostraciones asistidas por ordenador, las críticas a la escuela Bourbaki..., han llevado a discusión en años recientes la noción de derivación formal, y figuras como Manin o Tymoczko, entre otras, pretenden su modificación conceptual y, con ello, la modificación conceptual de lo que se entiende por Matemática. Debates que justifican someter el concepto de derivación formal —o demostración de los lógicos, como se la puede calificar— a un análisis crítico de su estructura y limitaciones formales, de aquellos elementos ideológicos que subyacen a la misma, de la tesis de que es la que capta el contenido esencial lógico del hacer matemático...

1. CARACTERIZACIÓN DE LAS NOCIONES EN JUEGO

1. Hay dos aspectos a distinguir en la noción de demostración formal: su estructura, sus funciones.

A) Estructura

1. Se parte de un lenguaje formal en el que se distinguen las configuraciones bien formadas α_n de las restantes —mediante reglas de formación que permitan, por mera inspección, tal distinción—.

A continuación, se establece, y de modo explícito,

1) Un conjunto de axiomas Ax.
2) Un conjunto de reglas de derivación ø. Finalmente, se define la derivación formal como
3) La sucesión $<\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n>$, en la cual: α_1 es un axioma; los α_i son elementos de Ax o se obtienen de los α_j anteriores mediante las reglas de ø; α_n es la conclusión o teorema demostrado.

El conjunto Ax puede desglosarse en dos subconjuntos distintos: AxL, formado por los axiomas comunes a todos los sistemas formales —constituyen la base para la obtención de las proposiciones que componen las teorías de los sistemas formales lógicos S—; y AxT, formado por axiomas específicos que dan origen a teorías matemáticas Th. Como AxLcAxLUAxT = Ax, los sistemas Th se estiman extensiones conservadoras de los sistemas S, ScTh, y se puede sostener que la Lógica es la base del hacer matemático.

Es una caracterización calificable de sintética, y su desarrollo expositivo conforma el estilo Frege-Hilbert en el sentido de que, dado el lenguaje formal, el punto de partida son los axiomas y las reglas de derivación, con la convicción de que el contenido conceptual se encuentra en los axiomas y la derivación no hace otra cosa que especificarlo en las conclusiones; de aquí que no haya extensión cognoscitiva, salvo en el plano psicológico, que debe ser descartado de este ámbito. Si se añade que los axiomas poseen valor veritativo —verdaderos en sí por lógicos o en una estructura o modelo—, al concebir la derivación como hereditaria, el teorema posee el carácter veritativo de los axiomas. Este aspecto se convierte en criterio normativo para contrastar la validez de la derivación: la conclusión no puede ser falsa...

2. Con Gentzen surge otra noción de derivación calificable de *analítica:* punto de partida, el mismo lenguaje base. Pero ahora se toma el conjunto ø de las reglas de derivación como primitivo, aceptando que el conjunto de axiomas es vacío. Las reglas se enfocan no como generadoras de la fórmula que aparece en la conclusión, sino como relación de consecuencia entre fórmulas; de aquí que puedan estimarse, como se hace desde Gentzen, como caracterizadoras de las constantes lógicas del lenguaje base adoptado. En otras palabras, las reglas se pueden considerar como un tipo de definición que da el significado de las constantes lógicas. En su establecimiento, en la determinación del significado de dichas constantes, las reglas se escinden en reglas de introducción —que son las auténticas definiciones— y reglas de eliminación o cancelación —que vienen justificadas, precisamente, por las de introducción—.

La derivación formal se convierte en el encadenamiento de las reglas de introducción y eliminación en un «árbol» donde la última fórmula es el teorema obtenido de las hipótesis no canceladas en el diagrama arbóreo. El desarrollo expositivo es el «estilo deducción natural» y se materializa en diversos tipos, como en el cálculo de secuentes, tablas semánticas, diagramas arbóreos...

Ya Gentzen apuntó que si bien las derivaciones en forma de árbol no representan en sentido estricto demostraciones —y ello porque las «auténticas» demostraciones han de mostrarse en secuencia lineal de proposiciones por la naturaleza del lenguaje en el que se expresan—, sin embargo, posibilitan captar lo que puede estimarse como «contenido esencial lógico» de la práctica matemática. En otros términos, las derivaciones en forma de árbol constituyen una formalización natural de las demostraciones matemáticas ordinarias. A su vez, muestran la ventaja de no repetir un resultado una vez que el mismo se ha obtenido; es decir, en las derivaciones en árbol sólo se emplea una vez una fórmula derivada cuando la misma se ha obtenido.

Estas ventajas de la derivación en forma de árbol se quieren avaladas porque se pueden transformar fácilmente en derivaciones en forma lineal, por lo que cabe sostener que representan auténticamente la demostración matemática —módulo de la transformación correspondiente a forma lineal—.

En los sistemas S de primer orden ambos enfoques, sintético y analítico, son equivalentes y se puede pasar a través de la reducción de la derivación sintáctica a su forma normal, que es única. Resultado que se extiende a sistemas formales de segundo orden, así como a algunos sistemas Th numéricos... Equivalencia apoyada en la transformacion mencionada de la derivación en forma de árbol a derivación como sucesión lineal y de ésta a forma normal; forma en la cual sólo los conceptos que ocurren en la conclusión intervienen en la derivación. Es decir, en la forma normal se han eliminado todos los conceptos y supuestos no esenciales para la conclusión.

Es claro que aquí se origina una primera problemática: a qué considerar parte innecesaria o no esencial en una derivación; de hecho, en el paso de una derivación en forma de árbol a una derivación en forma normal se pierde información que se muestra esencial en la primera, aunque no se muestre en la segunda por no intervenir en la conclusión. Pero ello da paso a otra cuestión como la problemática de la identidad de las demostraciones... (cf. Feferman 1975 y 1979, Stalmarck 1991).

3. Tanto en uno como en otro estilo se dan las reglas de modo explícito, posibilitando su empleo paso a paso sin saltar etapas, sin provocar lagunas —aunque en proceso posterior quepa una reducción: la conversión a la forma normal correspondiente—. La derivación formal, como sucesión lineal o como árbol, se quiere que muestre lo esencial de la estructura lógica demostrativa no sólo del sistema formal, sino de la práctica informal matemática. Bien entendido que, desde la concepción plasmada por Tarski, se pasa de la noción absoluta de verdad a una noción relativa, donde las proposiciones serán verdaderas en unas estructuras; carentes de sentido o incluso falsas, en otras...

Se tiene establecida así la estructura del concepto derivación formal, que se apoya en un lenguaje riguroso como el que proporciona el de primer orden y que, acompañado de un vocabulario conjuntista si es preciso, permite la formulación del razonamiento matemático. En el fondo, y en el plano derivativo sintáctico, permite que la demostración pueda ejercerla el intruso, el computador. Ello se consigue por la previa formalización —codificar en la conceptografía base—, convirtiendo la demostración informal en derivación formal, que se enfoca como un cálculo para, logrado el teorema, descodificarlo mediante una interpretación. De aquí que el proceso derivativo se pueda realizar en lo formal sin tener en cuenta el contenido de las proposiciones que intervienen.

B) Funciones y algunos supuestos

1. En primer lugar, se observa que en la demostración formal se ha invertido la concepción clasica de ser la verdad de la proposi-

ción matemática lo primario y su demostración lo secundario: ahora lo primario, lo que fundamenta la verdad de una proposición, es su demostración. Inversión epistemológica respecto a la concepción clásica en el sentido de que el conjunto T de proposiciones válidas de cada teoría Th se quiere como subconjunto propio del conjunto de proposiciones formalmente demostradas D a partir de los conjuntos Ax y ø. Se tiene TcD y, de ahí, la preocupación por cuestiones como las de consistencia de Ax y decidibilidad del proceso derivativo. Como supuesto implícito, y a pesar del marco pretendidamente sintáctico puro, se mantiene la convicción de que sólo las proposiciones verdaderas intervienen en las derivaciones de forma que la demostración sólo lo es de lo verdadero. Así, la función de la demostración es proporcionar justificación de las proposiciones y no la de provocar convicción o dar evidencia del contenido de la misma. En otras palabras, la demostración se ha convertido en la garantía que justifica la conclusión.

Con ello la demostración posee una función normativa: ha de tener el papel básico de la fundamentación, lo que implica que toda demostración matemática deba seguir los dictados de la demostración formal. Y lo debe seguir para que, por una parte, el hacer matemático quede fundamentado; por otra, alcance la exactitud y el rigor absoluto al impedir saltos y lagunas en la derivación. Rigor que se identifica con certeza y con infalibilidad del proceso.

Si las anteriores son funciones que se establecen con carácter positivo, se agrega, en análisis negativo y por la marginación respecto al contenido material, la supresión de la intuición informal. Contenido material, intuición informal se ven como parte de lo subjetivo del matemático, de lo psicológico y, desde esa subjetividad, posibilitaba atribuir como función de la demostración la de convencer respecto a la verdad de la proposición. Y desde una caracterización formal la función de la demostración no es convencer, sino asegurar la verdad y, con ello, fundamentarla.

Se tiene, aquí, un cúmulo de suposiciones. Así, las reglas de derivación o inferencia han de ser reglas de carácter finito, más aún, recursivo y decidibles. En consecuencia, se admite que puedan ser revisadas paso a paso en su aplicación en la sucesión derivación. La demostración cae bajo la verificabilidad directa finita, lo que entraña que se suponga, en el fondo, infalible. Suposición en el plano sintáctico y no en cuanto a su contenido epistémico. Un mal uso de las reglas puede ser detectado, y rectificado, por lo que la verificabilidad contiene el criterio de infalibilidad. Bien entendido que el error es de quien maneja las reglas y no de las reglas mismas. Con ello, a la derivación se la dota de unas notas —verificabilidad, infalibilidad— realmente trasvasadas desde un enfoque puramente computacional.

La suposición anterior implica aceptar lo que algunos califican como hecho empírico: la comprobación de que se utiliza de modo correcto el programa que da paso al cálculo se realiza en verificación perceptiva sobre los signos concretos que componen la derivación.

Igualmente se admite que la derivación es, como señalan Detlefsen-Lucker (1980), autosuficiente; forma una unidad de «razonamiento» que no requiere nada fuera de ella misma para producir la conclusión. Supone la creencia en el poder de la derivación como propio e independiente, en particular, de cualquier influjo epistémico y la aceptación del resultado de una demostración, no porque la proposición aparezca la última en la sucesión de las proposiciones que componen la derivación, sino porque es la derivación la auténtica razón por la cual la última es la proposición demostrada.

2. Es la noción de demostración formal y sus funciones asociadas, a la vez que la idea de que los matemáticos la manejan y aceptan, lo que parece tener en mente Tymoczko cuando habla de la necesidad de su revisión; es lo que parecen tener en mente quienes, desde la epistemología naturalizada, piden dicha revisión y modificación, acudiendo a las funciones de infalibilidad y verificabilidad asociadas a las sucesiones que componen la derivación formal, cuando tales notas parecen ausentes de las pruebas asistidas por computador, de las demostraciones que de modo efectivo hacen los matemáticos.

Y ello porque éstos, en su practica, siguen haciendo lo que les criticara tan duramente Frege: son superficiales —incluso los bourbakistas— por atender al contenido, no precisan con nitidez alguno de los conceptos que manejan, cometen errores y lagunas en sus demostraciones, aceptan conjeturas que carecen de demostración —y hasta llegan a dudar de que Dios, si lo hay, sepa la demostración de alguna de las mismas—. Hilbert, cuando hace matemática, no fundamentos, realiza demostraciones que son «teología» o dedica cursos a la imaginación geométrica —en 1920-21—, presentando no sus aspectos lógicos o formales, sino sus aspectos visuales, intuitivos, y combate la «superstición» de que la matemática no sea otra cosa que una prolongación de la aritmética y no tenga que ver también con lo visual geométrico; la superstición de que la matemática quede empedrada de fórmulas sin recurso a lo espacial visual y se aboque a sólo un tratamiento sistemático con cuestiones como la de su completud... (Hilbert-Cohn Vossen 1932).

¿Cómo es posible que los matemáticos se empeñen en no seguir los dictados normativos lógicos y no muestren en general la estructura lógica demostrativa correspondiente? ¿O es que el concepto de demostración formal nada tiene que ver con el hacer matemático —a pesar de lo admitido por logicistas, formalistas, neopositivistas...— o, de tener algo que ver, no refleja más que un aspecto y quizá el menos importante? Y si es así, ¿por qué modificarla o revisarla, como pretenden Tymoczko y algunos filósofos de epistemología naturalizada? Intentos de revisión que han conducido a hablar de una «nueva filosofía de la demostración matemática», en la cual la «nueva» demostración viene a ser calificada como cuasi-empírica, pública, hasta aleatoria..., o mero proceso social donde, con palabras de Manin,

> «A proof only becomes a proof after the sociat act of "accepting it as a proof"» (1977:48).

Desde la praxis matemática son preguntas que obligan a un análisis del concepto «derivación» y de los elementos ideológicos que en él se incardinan.

2. ANÁLISIS CRÍTICO DE LAS COMPONENTES DEFINICIONALES

1. Tal como se han establecido las nociones «regla de derivación» y «demostración formal» se puede afirmar que son objetos matemáticos y, más aún, objetos inmersos en un tipo de hacer matemático muy determinado: el hacer global. Incluso sus distintas variantes, como el concepto de consecuencia enfocado como operador monótono de clausura —que constituye una función asociada de conjunto—, o la caracterización recursiva de derivación, siguen siendo objetos matemáticos en el interior de un hacer de base global. Una regla de derivación es una aplicación r_i de un conjunto X en una proposición p, lo que se puede escribir por

$$r_i\colon X \longrightarrow p, \qquad \text{o bien} \qquad r_i\colon \frac{X}{p},$$

donde X es un subconjunto del conjunto P de todas las configuraciones bien formadas sobre el lenguaje L elegido —en general L_i— y puede ser, o no, unitario. El conjunto de las aplicaciones r_i es, precisamente, ø. Por la caracterización dada, tanto las reglas como ø son recursivos.

Se definió la derivación como sucesión: aplicación del retículo lineal booleano $<I, \pm>$ en P, siendo I un subconjunto de Ω. Se admite que la sucesión es de longitud finita: de lo contrario no tendríamos el teorema α_n en un número finito de pasos, aunque n pueda ser suficientemente largo; con palabras de Frege, la demostración no se mide con la vara.

> Desde lo conceptual puede generalizarse y pasar tanto a reglas de derivación como a derivaciones de longitud infinita, longitud asociada a cualquier tipo de ordinal; supone aceptar un compromiso teórico-conjuntista problemático, por lo cual, de momento, puede dejarse a un lado esta generalización.

Al ser objetos matemáticos, las propiedades que se les pueden atribuir tienen que demostrarse mediante procesos conceptuales matemáticos a los que, en su primera formulación, esas nociones pretenden fundamentar. Para ello, y como casos particulares de la noción de aplicación, hay que especificar sus características concretas.

a) De modo clásico, la caracterización se ha realizado atendiendo por modo exclusivo a la noción de derivación formal y a los conjuntos D de teoremas y T de fórmulas válidas. Desde el hacer de sistemas formales se ha ligado cada sucesión derivación con un número mediante una gödelización y, a la vez, se han identificado D y T con los conjuntos de sus números correspondientes. Con ello se pueden plantear y obtener demostraciones de propiedades atribuibles a las derivaciones y a sus elementos asociados, pero a través de sus conjuntos numéricos.

El concepto «demostración formal» se muestra recursivo y el conjunto D de teoremas derivables de una teoría axiomática formal —por ej., PA— como recursivamente enumerable (r.e.). Como hay conjuntos r.e. que no son recursivos, resulta que D es, en general, indecidible. Lo cual no implica el hecho de que dada una sucesión, finita, de fórmulas bien formadas, pueda decidirse si es o no una derivación. Con una salvedad, aun en el caso de ser decidible teóricamente, el posible algoritmo puede ser impracticable si exige un número de pasos o una cantidad de espacio exponencial respecto a las entradas del algoritmo.

Si se enlaza con problemas aritméticos puros, con la problemática de las ecuaciones diofánticas, como un conjunto es diofántico si es r.e., se tiene que D —para PA— es diofántico. El control de la demostración formal para una proposición α del sistema formal queda reducido al de la ejecución de un número de adiciones y multiplicaciones determinado por el polinomio diofántico correspondiente. Así, el criterio de verificabilidad asociado como función de la derivación formal queda reducido a las operaciones aritméticas elementales.

Es punto en el que, por otro lado, inciden los teoremas de indefinibilidad de Tarski y los de Gödel de incompletud y consistencia en el interior de un sistema formal. Incidencia por la cual una de las funciones básicas asociadas desde la inversión epistemológica a la derivación formal, la tesis

> la derivación formal a partir de un sistema de axiomas en los que no se tenga en cuenta su significado es la que avala la verdad de la proposición,

es insostenible y, con ella, que la derivación sea garantía de la verdad. Insostenible porque, como resultado de estos teoremas, se tiene DcT, es decir, lo contrario de lo que se mantenía desde esa inversión: las proposiciones derivables son las que aparecen formando un subconjunto propio del conjunto de proposiciones válidas. Más aún, D es r.e. y miembro de Σ_1, primer nivel de la jerarquía aritmética, mientras que T ni siquiera pertenece a Σ_∞...

b) En años recientes se ha centrado el estudio en las reglas de inferencia que, en general, se habían admitido carentes de problematica, y solían establecerse como esquemas inferenciales. Y las reglas encierran, sin embargo, una de las claves del concepto-núcleo —informal— de inferencia.

Al ser aplicaciones, han de satisfacer condiciones especiales. Parece razonable que entre ellas se encuentren las de reflexividad y transitividad —que reflejaría la composición de una regla consigo misma y, a la vez, la propiedad triangular $r_i{}^*r_i = r_i$—. También cabe exigir que ciertas reglas cumplan, aunque no todas a la vez, alguna de las condiciones de monotonía y cierre, conmutatividad o intercambio; generalización existencial, extensionalidad, sustituibilidad; contracción o expansión... Reglas que, al tener unas u otras características, delimitan unos u otros tipos de sistemas formales. Así, una regla como la de intercambio se sigue en la lógica lineal de Girard, pero no en una lógica como la de relevancia.

Incluso se puede estudiar si las reglas caen bajo la Teoría de la complejidad en el sentido de comprobar si se verifica que un enunciado como «una proposición α se obtiene como aplicación de una regla de inferencia aplicada sobre β' es o no decidible.

Las reglas de derivación no aparecen como reflejo de unas leyes del pensamiento, fijadas de una vez para siempre, como podría deducirse de las consideraciones a lo Frege, Tarski, logicistas, formalistas... La elección de reglas con unas u otras características, y que determinan unos u otros sistemas formales, es una elección, no una imposición. Y si no cabe hablar de imposición, tampoco de arbitrariedad o convencionalismo, sino de elección de unos u otros sistemas formales, que podrán tener aplicaciones en unos u otros campos. Inmediato y como problema, las relaciones entre dichos sistemas formales, ahora en función de las distintas reglas de inferencia adoptadas como punto de partida.

c) Para caracterizar las nociones de derivación y regla de derivación se partía de un dato: existencia de un lenguaje o conceptografía en el que codificar las formulaciones matemáticas. Implicaba un primer compromiso respecto a la concepción del hacer matemático: aceptar la escisión en dos de la praxis matemática. Aceptar un hacer matemático «informal» y uno formal que codifica al informal y en cuyo interior cobra sentido la función de garantizar el teorema y, a la vez. el rigor, infalibilidad, verificabilidad, funciones ligadas a la caracterización formal de la demostración. Derivación formal sólo factible en este segundo plano de codificación del hacer matemático...

Equivale a admitir, desde el punto de partida, que el razonamiento matemático, en su praxis demostrativa, no sigue la pauta de la derivación formal, por lo que tal praxis ha de ser traducida en lo formal donde se establece la estructura lógica de dicha praxis. Escisión que, en el fondo, no hace otra cosa que admitir que la propia Lógica formal, cuando no se la considera como parte del hacer matemático, sino como elemento fundamentante y explicativo del hacer matemático, es impotente para tal función o, para decirlo con palabras que parafrasean las de Yu. I. Manin,

> la lógica es tan capaz de justificar la matemática como la biología de justificar la vida (logic is capable of justying mathematics to no greater extent than biology is capable of justying life) (1977, VII).

Y ello porque los teoremas antes mencionados implican que en el hacer matemático se parte, precisamente, del conocimiento de los axiomas y de la proposición a demostrar; se parte de la admisión de su verdad aun antes de su codificación formal y su demostración. Por conocer el significado de una proposición como la que expresa la consistencia de PA y, con ello, la formulación de que tal proposición es indemostrable en el interior de PA, es por lo que cobra su sentido el segundo teorema de Gödel. Pleno sentido que ha llevado a considerar que la proposición que afirma que los axiomas de PA son consistentes es más fuerte que los propios axiomas, a pesar de que esa proposición pueda expresarse en los mismos términos en los que se expresa PA. Pero ello hace que el problema se retrotraiga y se centre en cómo acceder a la verdad de una proposición matemática. Desde lo formal, desde lo sintáctico puro, ese acceso se muestra imposible. Los resultados de indecidibilidad implican que tampoco es posible desde lo semántico. Se tiene que acceder, así, por argumentos informales.

Los teoremas de Gödel y de Tarski muestran que el enfoque formal de la Matemática no da cuenta de la misma. Muestran que el concepto de derivación no es apto para captar la noción de verdad aritmética, de verdad matemática; más aún, la noción de demostración formal se apoya en el conocimiento previo informal de lo que entra en juego o en la admisión de elementos de carácter existencial indecidibles en la práctica. En otras palabras, se apoya en una hipótesis ontológica sobre la existencia de la verdad de la proposición o en una hipótesis sobre la existencia de una determinada facultad del individuo...

2. ELECCIÓN Y PAPEL DE LOS AXIOMAS

Me centro en la componente estructural Ax, aunque con brevedad, porque ha sido tema muy debatido.

Si se siguiera a Frege, a Russell, los axiomas se han de estimar como principios lógicos universales y neutrales, y es a ellos a los que se remite, en última instancia, toda derivación. Elegir como punto de partida los axiomas de la Teoría de números, por ejemplo, no supone la realización de demostraciones auténticas, sino de unas subsucesiones, unas subderivaciones en las que falta la primera parte de la derivación, aquella en la que tales axiomas se obtienen como consecuencia de los lógicos. En rigor, habría que demostrar a partir de los axiomas lógicos y no de los aritméticos, que se ven como teoremas que habría que demostrar. La dificultad quizá, la longitud, pero ello no debe ser obstáculo para la auténtica derivación. Lo otro no sería más que una descripción abreviada como mucho...

Esta posición entraña, por un lado, una postura ideológica: la que ve la Matemática como una parte de la Lógica, por la cual AxL = AxLUAxT = Ax; por otro, hace surgir el problema de la captación de esos axiomas lógicos, primeros, universales y neutrales, base de todo el hacer demostrativo. Sus notas, para Frege, se centran en que son verdades primarias lógicas que, por serlo, no requieren, ni necesitan, demostración; pero su captación no depende de la Lógica... Su caracterización se apoyará, desde Russell, en la «forma lógica» y, con ello, se propiciará un giro lingüístico que traslada el problema, no lo resuelve... Cuestión que indico meramente para señalar que, en este plano, la Lógica se muestra impotente y tiene que acudir a otras consideraciones, salirse de su propio marco.

Independiente al problema de su captación, los axiomas se enfocan —en un Frege, en un Russell— con un objetivo: ser punto de partida para la derivación; constituir el núcleo que contiene todas las leyes, aunque en estado latente que la derivación lógica pone a luz. La elección de las leyes que componen ese núcleo viene dada en función pragmática: que sean 1o suficientemente potentes para obtener de ellas las restantes. Con lo cual, implícito, se crea una serie de problemas: la completud respecto al sistema elegido de axiomas; si esos axiomas son eternos o más bien atemporales; cómo saber que el conjunto Ax contiene todos los axiomas, porque si falta alguno, entonces las demostraciones hasta ahora existentes pueden carecer de valor o, a la inversa, lo que era indemostrable se hace demostrable...

Inciden aquí, de nuevo, los teoremas de incompletud de Gödel, que conllevan la negación de la existencia de un sistema único de axiomas para todo el hacer matemático. Consecuente, lo que se tiene es la aceptación de nuevos axiomas, ahora del infinito, extremadamente «largos» y que van agregándose al sistema previo. Pero son tales que, en su elección, pueden dar, como de hecho ha ocurrido, sistemas de axiomas incompatibles entre sí; según los axiomas que se agreguen, se obtendrán sistemas con un axioma como el de construibilidad y otros en los que se puede demostrar la negación del mismo. Teoremas de Gödel que hacen inviable la suposición de que pueda darse *un* sistema de axiomas único, y ya desde el principio, para el total de la matemática. Esto último a pesar de la demostración de Feferman, válida para la Aritmética, de que el conjunto T puede identificarse con el conjunto D de derivaciones formales obtenidas a partir del conjunto de axiomas $U\beta < \alpha\ Ax\alpha$, con β límite ordinal que no excede $\Omega_0^{\Omega 0 \Omega 0}$ y Ax_0 el conjunto de axiomas de Peano. En su demostración Feferman rompe el proceso gödeliano de agregar etapa tras etapa la proposición construida indemostrable en proceso de extensión conservadora de Ax_0; etapa tras etapa que, por el teorema de incompletud, mantiene que el conjunto de proposiciones derivables ampliado sigue siendo subconjunto propio del conjunto T ampliado y ello tras un número transfinito de etapas...

En lo anterior hay un compromiso respecto a los axiomas: considerarlos universales y neutrales, por lo que no pueden depender de contenido alguno. Si se es consecuente, disciplinas matemáticas como la Geometría dejan de ser materias matemáticas porque sus primeros principios dependen de unos elementos cognoscitivos particulares —en este caso, del espacio—. Es distinción en la que se incardina la diferencia entre conocimiento a priori y a posteriori. A priori, Lógica y Matemática; a posteriori, las restantes disciplinas, por depender de principios, en su demostración, no lógicos. Diferencia que conducía a Frege a indicar que las geometrías no euclídeas tenían la misma pretensión de ciencias que la alquimia o la astrología, a pesar de que pudieran caer bajo la noción de demostración formal... Distinción que destierra de la Matemática lo que no sea aritmetización de la misma, suprimiendo de este hacer su contenido y aporte geométrico, topológico, dando paso a lo que Hilbert, como he citado, calificara de superstición...

Ahora bien, la universalidad y neutralidad atribuibles a los elementos de Ax puede ser cuestionada al observar que los axiomas elegidos como universales por unas escuelas, los que conformarían los sistemas S de los que los restantes constituirían extensiones conservadoras, son rechazados en cuanto a tal universalidad y neutralidad por otras escuelas.

Es lo que se manifiesta en cuanto a la admisión o no como leyes lógicas de carácter neutral y universal —válidas, por consiguiente, para el manejo de conjuntos tanto finitos como infinitos— de principios como el de tercero excluido, $p \vee \neg p$, $ExA(x) \vee \neg ExA(x)$, o principio de omnisciencia como dirían los constructivistas, en el sentido de que con él se tiene evidencia o conocimiento que, de hecho, no se posee. Principio no aceptable por los intuicionistas hasta que no se tenga decidido el estatuto de p... Rechazo que lleva como consecuencia la no admisión de principios como $\neg\neg p \longrightarrow p$ como universalmente aceptable, o el de cuantificación existencial, donde un intuicionista admite $\vdash ExA(x)$ sólo en el caso en el que se tenga $\vdash A(t)$ para algún término t...

Como precisión, aquí: lo mismo ocurre respecto a las reglas de derivación donde la de *reductio*,

$$\frac{\begin{array}{c}\neg\alpha\\ \beta \& \neg\beta\end{array}}{\alpha}$$

no es aceptable para el intuicionista por descargar suposiciones y en su lugar admite la correspondiente *ex falso quodlibet*

$$\frac{\neg\alpha \qquad \alpha}{\beta}$$

Pero las reglas, por lo antes comentado, son caracterizadoras de los sistemas formales y, de aceptar unas y rechazar otras, se tiene que las mismas dejan de ser, como ocurría con los axiomas, universales y neutrales (cf. Hand 1993).

El concepto de demostración que se incardina en cada escuela pasaría a ser, así, diferente y no sólo en cuanto al estatuto de los axiomas y las reglas de derivación, sino en cuanto al propio núcleo de la previa formalización y, con ello, al concepto de derivación formal convertida, ahora, en un tipo de construcción no separable de lo epistémico.

Pero si ésta es una posible interpretación, cabe consignar que el enfoque del intuicionismo cae bajo el ámbito de lo formalizable estricto en el sentido de que sus construcciones pueden ser convertidas en «programas» y una demostración se hace objeto o proceso algorítmico. Incluso más radical, en cuanto a la posible supeditación de la derivación sintáctica formalista, se tiene la del enfoque intuicionista al computacional como lo muestra la línea seguida por Bruin o Huet, que han acogido en la ciencia de la computación los procesos instaurados por Martin-Löf...

Posibilidades electivas que indican que la neutralidad asociada a los axiomas no existe. Y frente a posiciones a lo Frege, a lo Russell, la negación de neutralidad se ve avalada porque en el fondo se está admitiendo la tesis de primer orden y, con ella, se pasa a considerar que los axiomas y las reglas de derivación caracterizan las constantes lógicas adoptadas como primitivas en el lenguaje formal de partida.

Desde Gentzen, desde el giro lingüístico posterior, desde algún ámbito actual de la lingüística —que acepta la escisión señalada entre praxis matemática informal y praxis matemática formal— se pretende que las constantes lógicas reflejen el contenido lógico de ciertas expresiones del lenguaje natural. Se sostiene que la inferencia lógica formal no hace otra cosa que reflejar el carácter inferencial natural asociado a conectivos del lenguaje como «o», «y», «no», «si... entonces», «todos»... Ahora bien, ese reflejo no es más que aparente, porque hasta ahora sólo se han aceptado unos determinados conectivos y cuantificadores como constantes lógicas: los que se manejaban en el hacer matemático y no, precisamente, en el lenguaje natural. Así, se ha mantenido como constante lógica la negación bivalente, que da paso a un tipo de consistencia único, el que maneja, precisamente, el matemático; esa constante viene desprovista de los matices de consistencia que aparecen en la lengua natural. Sólo actualmente, y no sólo desde ámbitos lingüísticos, se están desarrollando sistemas con constantes lógicas no desprovistas de los matices que se quieren propios de su empleo en el lenguaje natural, aunque en su plena formalización se tengan que buscar, en su regulación semántica, elementos radicalmente arbitrarios.

Se llega, de esta manera, a que la caracterización de derivación —por no decir, la elección de los conectivos naturales— se ha hecho en función de un previo hacer, el matemático, en el que termina siendo englobado, y el concepto en sí de demostración no se muestra como noción absoluta, sino relativa a concepciones previas de partida. Son las que delimitan un campo al que, luego, pretenden servir de fundamento y proporcionarle un criterio prescriptivo.

Desde otro ángulo, y frente a posiciones a lo Frege o Russell, cabe observar que el papel de base derivativa no es el único que poseen los axiomas. Desde el siglo XIX los axiomas se enfocan no sólo como suposiciones acerca de procesos de construibilidad o como base para la derivación, sino como constituyendo la definición implícita de estructuras posibles. No sólo de modo directo, sino que, como toda definición, produce un criterio negativo: elimina modelos que no satisfacen tal estructura posible. Con ello caracterizan, contextualmente, las nociones primitivas. Los axiomas se convierten en elementos constitutivos de estructuras, a las que describen tanto positiva como negativamente.

Y la pregunta natural, ya realizada por Poincaré: cómo elegir, cómo establecer las hipótesis constitutivas de los sistemas formales o de estructuras que sólo posteriormente se adoptan como principios de derivación sintáctica. La lógica formal no permite justificar las decisiones electivas ni, consecuentemente, las decisiones inferenciales. Es un papel que no aparece esbozado en la caracterización de la derivación formal y llega a restringir el alcance pretendido de la universalidad querida para la misma.

En la base de la concepción que da paso al concepto de derivación formal se confunden los planos postulacional, axiomático y formal del metodo axiomático y su papel definicional. El plano postulacional establece el marco de juego delimitando las suposiciones básicas acerca de los procesos de construibilidad que pueden realizarse en el mismo. Sus conceptos-núcleo pueden llegar a sistematizarse mediante una formulación axiomática. Si se da este paso, cabe formalizar con posterioridad, siempre en función de estudiar y desarrollar lo que en ese marco se ha plasmado. Segundo paso en el que ya se parte de un hacer caracterizado por unos conceptos-núcleo y en el que se elabora la teoría de una parte del mismo, elaboración que requiere el establecimiento de axiomas con el objetivo de que delimiten con precisión la teoría de alguno de los elementos de ese hacer previo. Ello implica que pueden establecerse distintas axiomatizaciones que den teorías, isomorfas o no, de alguno de los elementos del hacer al que pretenden desarrollar en el plano teórico. Con un ejemplo clásico: la axiomática ZFS no define los conjuntos, sino que acota un campo del hacer global, intentando aclarar y desarrollar una teoría coherente en su interior.

En un tercer plano, los axiomas no acotan un campo de un marco previo, sino que se adoptan ya como caracterizadores, sin más, de una estructura posible. Es el caso señalado del enfoque de que los axiomas caracterizan el manejo de las constantes lógicas tomadas como primitivas en el lenguaje formal base...

En el método axiomático postulacional no se parte de los axiomas, sino que se llega a ellos para, posteriormente, sistematizar y elaborar una teoría coherente —o varias— en el terreno de un hacer previo delimitado por unos conceptos-núcleo que son los que se pretenden, en el fondo, ir caracterizando.

Tener presente los distintos planos en el manejo del método axiomático entraña la afirmación de que la concepción de derivación formal no puede tener el carácter normativo que se le ha asociado como una de sus funciones. A la vez, invalida la pretensión apuntada de que Ax = AxL. Lo que se tiene, por el contrario, y ya desde el tercer plano, es la elaboración de distintos sistemas y teorías Th, entre los cuales cabe considerar como unos sistemas más a los sistemas S caracterizados según distintos axiomas y según distintas reglas de derivación. Elaboración de estructuras y sistemas en la cual no se agota el hacer matemático. Un hacer que, en el manejo del método axiomático en sus distintos planos, ha de atender, siempre, al factor epistémico.

3. El supuesto de la conceptografía base

Al describir la estructura de la noción derivación formal indiqué la existencia, como punto de partida, de un lenguaje formal, de una conceptografía. La misma se apoya en un claro elemento ideológico: su elaboración depende de la hipótesis de un atomismo radical. Las configuraciones bien formadas se construyen a partir de unos elementos atómicos primarios, y las proposiciones moleculares, a partir de las atómicas, con lo cual el total viene establecido por sus partes propias, sin que ese total posea cualidades emergentes. Es una hipótesis que se suele ocultar bajo la afirmación técnica de que las fórmulas bien formadas se generan por *procesos inductivos* a partir de la *reiteración* de unas determinadas operaciones. Recurso técnico que no hace otra cosa que manifestar que la elaboración de esa conceptografía cae bajo el hacer matemático, con la exigencia de que éste termine formalizándose en sí mismo.

Esta hipótesis subyacente no es una hipótesis estrictamente lógica formal, sino ontológica o, como mucho, metodológica. Es una hipótesis de molecularidad y de no-contextualidad que se quiere válida para la elaboración de los cálculos o sistemas formales, pero no se ha demostrado que sea la adecuada para todo tipo de razonamiento, en particular el matemático, del que pretende ser su esqueleto.

Hay, además, una consideración pragmática ya señalada por Poincaré y que, en principio, fue rechazada por el mismo argumento de que la longitud de las demostraciones no tenía que medirse con la vara: si se acepta el punto de partida querido por la formalización, la demostración y la exposición matemática serían imposibles. De aquí la necesidad de la definición explícita y de la abreviatura para reducir complejidad de escritura de las configuraciones de las fórmulas bien formadas. Pero esta necesidad práctica supone, aliada, la supresión del paso a paso y la admisión de las «lagunas» demostrativas...

3. COMPROMISOS EPISTEMOLÓGICOS, ANTROPOLÓGICOS, METODOLÓGICOS

He señalado que, como nota esencial de la derivación, se quiere su marginación a elementos cognoscitivos e intuitivos, al contenido que puedan vehicular las proposiciones componentes. La inferencia lógica se margina a cualquier proceso cognoscitivo y atiende, exclusivamente, a la forma inferencial del mismo, a lo que se estima como su estructura profunda. Es afirmación clásica que el contenido de una disciplina queda aportado por sus axiomas específicos, a la vez que la ampliación de ese contenido pertenece a la misma; a lo formal corresponde, por modo único, establecer los enlaces derivativos, inferenciales, entre los esquemas de axiomas y los posibles esquemas de teoremas.

Es, nuevamente, la afirmación de la universalidad y neutralidad del elemento inferencial lógico. Con ejemplo de Denant, que sea un ratón el que razone:

> Si hay un gato a la izquierda, no debo ir a la izquierda;
> hay un gato a la izquierda.
> Por tanto, no debo ir a la izquierda.

Carece de valor desde lo inferencial puro. Desde lo inferencial no se entra en la problemática de si los ratones razonan o no; de si hay un gato a la izquierda; de si el ratón, y quizá sea lo importante en la elaboración de una derivación, se comporta o no «racionalmente» según cómo haya sido el contenido del razonamiento y su consecuente conducta: si actúa o no en consonancia con lo deducido. Comportamiento «racional» condicionado quizá por un proceso de adaptación biológica —en el que se obtenga comida sin ser comido— y que puede justificar su posterior formalización a manera de razonamiento deductivo y en plasmación de *modus ponens*. De lo inferencial puro sólo hay que tener presente la validez o no de la forma del razonamiento.

Adoptar esta posición supone unos compromisos con una clara posición epistemológica condicionadora, precisamente, de tal postura:

1. En primer lugar se acepta que pueden disociarse, en los procesos epistémicos, el proceso en sí del contenido y de las relaciones entre los contenidos que en él se manejan. En *dictum* clásico, se puede disociar la Forma del Contenido. Escisión por la que cobra su sentido la noción de demostración formal en perjuicio de otros factores más puramente epistémicos. El compromiso supone:

a) obtenidos unos contenidos epistémicos —y no se entra en la averiguación de cómo y por qué, ello pertenecería al ámbito de la psicología, al contexto de descubrimiento— se pueden establecer relaciones formales entre los mismos mediante un proceso de codificación;

b) se manejan estas relaciones formales codificadas;

c) se admite que en esa manipulación formal se extiende el contenido epistémico al volver a considerar, tras la descodificación, los procesos epistémicos originales.

Es lo que viene a condensarse en la afirmación tarskiana de que el razonamiento formal no es puro juego, sino que en él se pretende aumentar el conocimiento: el reflejado en la conclusión de la derivación (Tarski 1969: 296). Es otra forma de aseverar que el contenido epistémico de una teoría se encuentra «concentrado» en los axiomas de la misma.

Es un compromiso epistemológico que depende de unos factores históricos y de unos haceres determinados. A Kant le posibilitó separar el pensar del conocer, dejando el primero para la Metafísica y el segundo para las ciencias naturales, entre las cuales, ciertamente, incluyó la Matemática; pero trató de superar esta dicotomía, problemática, a través de la Lógica trascendental para enlazar pensamiento y sensibilidad dado que, por separado, ninguno procuraba conocimiento. Dicotomía que procedía, en el fondo, de una metáfora arraigada en la Mecánica newtoniana, en la que el espacio hace de contenedor formal ocupado por unos contenidos materiales que son lo que obedecen unas leyes como las del movimiento; en paralelo, el pensamiento lógico formal puede pensar formalmente, sin contenido alguno mientras que el conocimiento exige de lo material, del contenido. Dicotomía que establece que lo formal depende del intelecto mientras que el contenido ha de ser aportado por la observación.

Distinción pensamiento-conocimiento, forma-contenido, que, quizá por su simplicidad, ha presidido y preside gran parte del pensamiento occidental —en el neopositivismo la distinción entre Ciencias formales y naturales entraña la nítida separación entre forma y contenido observacional, aunque se traslade el constituyente de lo formal desde el intelecto del sujeto trascendental a la configuración sígnica de la proposición, eliminado así el sujeto epistémico en beneficio de un supuesto conocimiento objetivo, que termina requiriendo de, al menos, un tercer mundo...—. Es dicotomía que muestra su más clara aplicación, sin embargo, en la criptografía, que requiere ocultar el contenido del mensaje en la propia forma con la cual se envía dicho contenido...

Sin embargo, la metáfora en la que se apoya la separación contenedor-contenido se hace inviable en alguna teoría física, donde la forma geométrica se incardina con la materia en cada uno de los puntos del espacio-tiempo... Y esa inviabilidad muestra que es dicotomía, al menos discutible, si no rechazable radicalmente, como elemento condicionador del razonamiento.

En segundo lugar, no sólo compromiso epistemológico, también antropológico y comunicativo-lingüístico. Suponer la manejabilidad no ya del contenido, sino de la forma pura que lo representa, forma que a su vez requiere del signo material para mostrarse —mediante el esquema proposicional, el inferencial...— posibilita la manipulación no ya de la forma, sino del signo y, con ella, gracias a la posterior descodificación, la supresión del sujeto cognoscente. Es uno de los grandes logros que conlleva este compromiso, y no sólo en el hacer matemático: obtener una ciencia objetiva sin sujeto cognoscente. Supresión con la cual se pretende, a la vez, la plena objetividad en cuanto al proceso inferencial formal que, por ello, reafirma su universalidad —respecto hasta los ratones— y su neutralidad epistémica —a pesar de lo apuntado de que tal neutralidad y universalidad son inexistentes al elegir un determinado lenguaje como lenguaje formal base—. Con ello, y entre otras consecuencias, la demostración queda amputada de uno de los papeles que hasta el siglo XIX se le había asociado: convencer. Y ello porque no hay sujeto epistémico alguno para el que pueda realizarse tal función.

Función de convencer que podía venir desde la captación del signo puro porque, como indicara Peirce, el signo posee un poder activo —naturalmente en relación con un sujeto epistémico que lo capte— que conduce a poner en relación signos entre sí, a establecer conexiones entre distintos objetos al reenviar el signo a un objeto y determinar, incluso, su interpretación, además de tener un poder constructivo de engendramiento porque obliga a interpretar al intérprete... El compromiso antropológico mecanicista que subyace a la concepción de derivación formal hace inviable la captación del poder de lo sígnico al que parece, por otro lado, reducirse.

En cuanto a lo comunicativo-lingüístico, el proceso manipulativo epistémico exige la codificación en una conceptografía, en un lenguaje formal que se supone más manejable que el natural en el que se produce el proceso epistémico. Este proceso, por inmerso en el lenguaje natural, queda inundado de ruidos en forma de equivocidades, vaguedades, analogías... Escisión entre formal y natural que hace suya la metáfora del campo de la información y la criptografía, metáfora asociada a: mensaje$_1$, codificación del mensaje$_1$, manipulación codificada, transmisión, recepción, descodificación, mensaje$_2$; con la idea de un isomorfismo entre mensaje$_1$ y mensaje$_2$. Metáfora muy discutida y de la que, aquí, meramente indico que su aceptación ha traído la consecuencia del nulo interés que, desde la lógica formal, se ha mostrado hacia los aspectos contextuales y pragmáticos, hacia enfoques del lenguaje no puramente informacionales como los que se contienen en los de carácter inferencial. No entraban en el marco de sus compromisos de base.

2. Son compromisos que vienen arropados por un elemento de carácter no conceptual, sino estrictamente valorativo. Valoración que apoya, en el fondo, la identificación de la derivación con el cálculo, por lo cual demostrar = calcular y, por lo ya indicado, igual a conocer. De aquí la exigencia de establecer las reglas del cálculo = derivación de manera explícita, así como la necesidad de no saltar etapa alguna en su aplicación. Lo importante es que la derivación funcione como un cálculo, lo que equivale a exigir que sea infalible. Infalibilidad que, en su regulación, requiere la posible verificabilidad de las reglas en su uso. Los dos rasgos en los que se detienen, precisamente, los críticos de la demostración matemática para intentar poner en marcha nuevos conceptos asociados a la misma.

La identificación señalada valora la elaboración de algoritmos que hagan inútil aprender las reglas: un ordenador lo hace más rapido y con mayor precisión. Elaboración imprescindible, además, si no hay sujeto epistémico: el cálculo, la derivación formal tiene que ser ejecutada por un sujeto objetivo, por una máquina. Con ello se mantiene uno de los sueños de Leibniz: identificar razonamiento con algoritmo computable, en paralelo a su identificación ontológica entre cálculo y ser (Martínez Marzoa 1991). De hecho basta observar el paralelismo entre las exigencias impuestas al formular las condiciones en el plano sintáctico de la derivación —reglas como instrucciones precisas que puedan aplicarse mecánicamente; tomar como punto de partida configuraciones explícitamente formuladas— con la de los algoritmos como sistemas bien determinados de instrucciones precisas. El enfoque de la noción de derivación formal es, realmente, computacional.

Es consecuente que, desde posiciones como la logicista o la formalista, se potenciara lo sintáctico puro, y que Hilbert —desde la consideración de fundamentos, no desde la práctica matemática— llegara a estimar la decidibilidad como el problema fundamental de la Lógica. Consecuente porque la respuesta a este problema daba la llave para cuestiones como la completud, la consistencia... y, sobre todo, para alcanzar su programa de que todo problema puede ser resuelto —negativa o positivamente—.

En la misma línea es consecuente que Turing enlace su trabajo con la pregunta: ¿puede pensar una máquina?, o la aparición de campos como el de Inteligencia Artificial, donde, en sus momentos iniciales, el razonamiento se enfoca desde la Lógica formal identificada con computable.

Compromisos con su valoración correspondiente que llevan a la concepción de que la esencia del hacer matemático es un hacer derivativo formal desde unos puntos de partida y con unas reglas establecidas de antemano. Se alcanza, en el fondo, un enfoque computacional del hacer matemático, en el que culminan escuelas como logicismo, formalismo, finitismo e intuicionismo formal en sus distintas acepciones finitistas. Un hacer formal carente de contenido, aunque alguno de estos finitismos pretenda que exista, pero dado, por modo exclusivo, por lo numérico.

3. Es concepción en la que se observan, al menos, dos elementos:

a) Reducción de haceres como el Figural y el Global al computacional. Lo cual supone, implícito, la admisión de que sólo hay un hacer matemático y, con ello, igualmente, que sólo hay un tipo de razonamiento;

b) Aceptación de una inversión respecto a los papeles que hasta ahora habían mostrado Cálculo y Razonamiento. Desde una visión «clásica», todo cálculo podía enfocarse como un tipo de razonamiento especial, en el sentido de que calcular podía equipararse a un tipo restringido de concluir. Es consideración que tiene una serie de ventajas: «mecanizar» algunos tipos de razonamiento, por hacerlos más manejables. En el

Cálculo Infinitesimal, por ejemplo, el establecimiento de unas reglas de derivación posibilitan obtener la derivada de cualquier función dada sin tener que «pensar»... Desde esta perspectiva, el proceso formalizador se convierte en un mecanismo de abstracción y simplificación del razonamiento.

Sin embargo, desde la inversión señalada, es ahora el razonamiento el que se convierte, en su totalidad, en un cálculo, en cálculo estrictamente deductivo, como si el mismo fuera todo el razonamiento, el único seguro y fiable. Razonar es computar, calcular.

Es línea cartesiana y leibniziana: el razonamiento no es más que un cálculo lógico o algebraico que ha de seguir un método estricto —dado por reglas en paralelo a las algebraicas, o a partir de unos primeros principios o axiomas y unas reglas de derivación—. Métodos aceptables única y exclusivamente en función de criterios algorítmicos: la derivación es aceptable si procede según las reglas cuya aplicación correcta se puede verificar de modo estrictamente computacional (Beeson, 1988). Inversión que condiciona la visión del hacer matemático y, con él, de cualquier otro tipo de razonamiento. Pero es inversión que, a su vez, y hago aquí un mero apunte, viene condicionada por el tipo de sociedad en el que ese hacer, que no es otra cosa que un determinado producto de la especie humana, se produce.

4. Un último punto, de momento. Cabría aceptar, de hecho, esos compromisos epistemológico, antropológico, comunicativo-lingüístico; que la noción de derivación formal se convierte en un objeto matemático sobre el cual realizar nuevas derivaciones y que, a pesar de ello, no se tiene regreso al infinito porque se reconoce que la sucesión dada como derivación es una demostración; que la clarificación de la noción se ha realizado este siglo, por lo cual las demostraciones matemáticas de épocas anteriores no la seguían en cuanto a su expresión superficial, aunque si eran demostraciones, lo eran en cuanto a su estructura profunda no explicitada... Y, a pesar de esos compromisos y supuestos, mantener que el concepto de derivación formal constituye el núcleo lógico-formal, manifiesta la estructura profunda de la demostración matemática, estructura permanente y,

por ello, inmanente en las demostraciones realizadas en la Matemática en todo tiempo y lugar. Quiero decir, cabe sostener que esta noción es, en el fondo, independiente a todos los compromisos señalados, propios únicamente del momento clarificador y que, por ello, puede desgajarse de los mismos. Es lo mantenido por algún lógico... Y, sin embargo...

He indicado que el concepto de derivación formal conduce al hacer computacional en el sentido de que termina identificando razonar con calcular y computar. El concepto de derivación formal cae bajo la noción de sucesión de fórmulas escritas en una conceptografía convenientemente elegida. Es concepción en la cual prima, por ello, el elemento iterativo numérico, aritmético, esencialmente discreto. Lo geométrico espacial, lo topológico queda radicalmente ausente de esta noción que manifiesta única y exclusivamente lo manipulativo configuracional sígnico discreto, salvo en la exigencia mínima del reconocimiento de la forma inscripcionista en la cual ese lenguaje se plasma.

Es una concepción que viene subordinada por el papel del lenguaje como velo, como elemento interpuesto entre el concepto y su expresión; lenguaje que tanto en su pronunciación como en su plasmación escrita requiere de lo discreto, de lo reiterable y del principio de resolución en partes que compongan el total, siempre como sucesión. Requiere, como en Teoría de la complejidad, pasar del Objeto a una Descripción del objeto y que esa descripción se realice no a través de imágenes —con predominio de lo geométrico y lo topológico—, sino a través de un lenguaje sígnico escrito finito que permite una aritmetización, por lo que se puede identificar la complejidad del objeto con la complejidad de la descripción y ésta con un número.

Concepción reduccionista no sólo de procesos, sino de objetos a una aritmetización finita radical que se plasma incluso en quienes pretenden una matemática «constructiva», de acuerdo con concepciones finitistas como el constructivismo de Bishop apoyado en la idea de que el hacer matemático global carece de contenido numérico y, por ello, debe ser reconstruido constructiva, algorítmicamente, para dotarle de dicho contenido numérico.

Lo topológico, lo espacial, con su continuidad asociada que sólo puede darse y captarse mediante la imagen visual, queda ausente o, como mucho, se intenta su subordinación a lo discreto. Sin embargo, el hacer matemático no queda reducido, en su totalidad, a lo discreto, sino que exige, en gran parte, de la captación topológica espacial de la forma, de la imaginación del espacio, hasta de la forma de los signos en los cuales se materializa lo discreto... Es lo topológico lo que permite la captación de elementos tan esenciales como la simetría, semejanza, identidad...; o las transformaciones como traslación, homotecia, giro... El hacer matemático requiere, con Hilbert, de la «imaginación geométrica», con rechazo de reduccionismos numéricos que se convierten en mera superstición. Incluso un Cálculo diferencial que se centra en mayorar, minorar, acotar —en palabras de Dieudonné— exige del lenguaje geométrico y de la imagen en el plano para introducir «con sentido» las desigualdades numéricas pertinentes. Suprimir esta componente, reducir lo topológico y el continuo a lo meramente discreto y computacional no es abarcar el total del razonamiento matemático y, con ello, abarcar lo que pueda considerarse una demostración matemática, sino realizar una elección reduccionista, previa a la propia conceptualización de la noción derivación formal que, por ello, sólo capta uno de sus aspectos posibles.

Pretender eliminar lo geométrico y topológico no equivale a otra cosa que a pretender la eliminación de una de las raíces del pensamiento matemático, ya que lo continuo es irreducible a lo discreto, a lo aritmético.

Irreducibilidad de lo geométrico, que cabe enfocar igualmente desde lo algebraico: basta tener en cuenta que la Aritmética de los números naturales, por semianillo, viene soportada por la estructura de semigrupo, mientras que lo geométrico viene soportado por la estructura de grupo. Y un semigrupo no puede dar cuenta del total de las propiedades del grupo, salvo un empobrecimiento radical.

Irreducibilidad que justifica las afirmaciones que realicé en 1.2. de que los matemáticos, en su hacer, siguen haciendo lo que Frege les criticara tan duramente. Justifica la afirmación de que la derivación formal, la concepción de demostración de los lógicos, no coincide con la demostración epistémica de los matemáticos.

JAVIER DE LORENZO
Universidad de Valladolid

BIBLIOGRAFÍA

Appel-Haken, 1977, 'La solución del problema del mapa de cuatro colores', *Inv. y Cia.*, Dcbre., 78-90.

Beeson, M. J., 1988, 'Computerizing Mathematics: Logic and Computation', en Herken (ed.): *The Universal Turing Machine*, 191-225, Oxford Univ. Press.

De Lorenzo, J., 199?, 'Ordenador y demostración matemática', en *Calculemos. Obra homenaje a Miguel Sánchez Mazas*. En prensa.

Detlefsen - Lucker, 1980, 'The Four-color theorem and Mathematical Proof', *J. Of Phil.*, 77, 803-820.

Detlefsen, M., 1990, 'Brouwerian Intuitionism', *Mind.*, 99, 501-534.

Fagin, R. - Halpern, J. Y. - Vardi, M. Y., 1992, 'What is an Inference Rule?', *JSL*, 57-3, 1018-1045.

Feferman, S., 1975, Review of Prawitz 1971, 'Ideas and results in proof theory', en *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium* (ed. Fenstad), North-Holland, 235-307. *JSL*, 40, 232-234.

—, 1979, 'What Does Logic Have to Tell us about Mathematical Proofs?', *The Mathematical Intelligencer*, 2:1, 20-24.

Frege, G., 1884, *Die Grundlagen der Arithmetik*, Versión de U. Moulines, *Fundamentos de la Aritmética*, Ed. Laia, B., 1972.

Hand, M., 1993, 'Negations in Conflict', *Erkenntnis*, 38, 115-129.

Hilbert-Cohn Vossen, 1932, *Geometry and the Imagination*, Chelsea 1952. Trad. al inglés de P. Nemenyi de *Anschauliche Geometrie*.

Kleiner, I., 1991, 'Rigor and Proof in Mathematics: A Historial Perspective', *Mathematics Magazine*, vols. 64-5, 291-314.

Manin, Yu. I., 1977, *A Course on Mathematical Logic*, Springer-Verlag.

Martínez Marzoa, F., 1991, *Cálculo y Ser. Aproximación a Leibniz*, Visor, M.

Stalmarck, G., 1991, 'Normalization Theorems for full First Order Classical Natural Deduction', *ISL*, 56-1, 129-149.

Stillwell, J., [2]1991, *Mathematics and Its History*, Sprinyer-Verlay.

Tarski, A., 1969, 'Truth and Proofs', *Scientific Amer.*, 220, 63-77. Versión francesa en *L'Âge de la Science*, 2, 1969, 279-301.

Thibaud, P., 1997, 'La thèse peircienne de l'identité de la pensée et du signe', *Archives de Philosophie*, 55, 437-460.

Tymoczko, Th. (ed), 1986, *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Birkhäuser.

—, 1979, 'The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance', *The Journal of Philosophy*, 76-2, 57-83, en Tymoczko (ed.), 1986, 243-266.

—, 1986, 'Making Room for Mathematicians in the Philosophy of Mathematics', *Mat. Intell.*, 3, 14-50.