Estudios Filosóficos, 143 (2001) 7-35 ESTUDIOS

Reflexiones críticas en torno a Kant y el hacer matemático

En un año como el 2000, consagrado como Año Mundial de la Matemática, puede ser oportuno volver a figuras que, como Kant, han influido en todas las áreas de pensamiento y, en particular, en el matemático. Decir Kant equivale a afirmar que nos encontramos con un clásico en el hacer filosófico. Y un clásico entraña, debe entrañar, su relectura con total independencia a cualquier oportunidad como la apuntada. Relectura desde un instante posterior, condicionada por el contexto de ese instante de relectura, de previas lecturas con sus reinterpretaciones asociadas que no pueden evitar su conexión con el contexto de pensamiento en el que esa relectura se actualiza...

Conexión que me lleva a unas consideraciones previas, condicionadoras de la relectura de quienes hacen llamada a Kant desde la misma, centradas, aquí y fundamentalmente, en el contexto del hacer matemático.

1. RETOMANDO A KANT

En el caso de *Kant y el hacer matemático* esa relectura comporta, al menos, dos aspectos: la de quienes mencionan a Kant desde una posición creadora, bien en el hacer matemático intrínseco, en la Matemática, bien en la Filosofía de la Matemática; la de quienes acuden o hacen llamada a Kant desde la Historia de la Filosofía y plasman estudios en torno a Kant, pretendiendo 'reproducir' lo que dijo, lo que se quiere interpretar como lo que dijo o se hacen intentos de explicar 'kantianamente' algunos temas del hacer matemático... Son dos líneas que conviene diferenciar.

Usando el nombre de Kant... en vano

Desde la primera se tienen figuras como Frege, Poincaré, Hilbert, Brouwer... que hacen Matemática y, a la vez, Filosofía de la Matemática. Figuras que citan a Kant y emplean su terminología. Así, Frege indicará que en su Filosofía de la Aritmética lo único que pretende es completar los análisis kantianos. Análisis que se le muestran correctos en lo tocante a la Geometría pero no, por incompletos, en lo tocante a la Aritmética. Poincaré utilizará, frente a Couturat, a Russell, la terminología kantiana y sostendrá que nociones como la inducción completa, la estructura de grupo, son juicios sintéticos a priori. Hilbert acudirá a la misma referencia para sostener la diferencia entre su Matemática 'real' y su Matemática 'ideal'...

La terminología utilizada por matemáticos como los que he mencionado es kantiana; incluso manejan citas textuales. Sin embargo, ese uso puede conducir a tremendas equivocaciones si de este empleo, de esas citas, se saca la consecuencia de que estos autores son discípulos o, al menos, seguidores kantianos.

De un logicista como Frege esta consecuencia quedó, pronto, eliminada. Porque, en Frege, un juicio analítico es aquél que se deriva de las definiciones y de unos primeros principios explícitos a través de la sola demostración. No es, jamás, aquél que se obtiene del análisis conceptual del juicio escindido en Predicado y Sujeto en la forma S-P porque, para Frege, y en primer lugar, un juicio es, siempre, una función veritativa con uno o varios argumentos; en segundo lugar, un análisis del tipo empleado por Kant caería bajo la sospecha de psicologismo: saber, por parte de quien realiza el análisis, que las notas contenidas en el predicado ya están contenidas en el sujeto... Muy poco kantiano, un Frege.

Algo del mismo tipo ocurre con Poincaré. Un grupo, calificado como juicio sintético a priori, no es, como grupo, juicio alguno, sino una estructura algebraica. Estructura conformadora del sujeto pero no constitutiva originaria de ese sujeto, sino conformadora del mismo por un proceso evolutivo de adaptación de algunas subespecies humanas al medio natural que las entorna. Y lo mismo respecto a la inducción completa que más que un juicio es un proceso reiterativo incardinado en el sujeto desde unos mecanismos incluso fisiológicos como los pasos al andar... Muy poco kantiano, un Poincaré, a pesar de todas las historias al uso...

Los mismos términos pero muy diferentes significados. Y ello porque autores como los mencionados no acuden a Kant desde una óptica de análisis histórico o filológico crítico, sino que manejan una terminología que cabría atribuir a Kant. No se preocupan por si los términos manejados son utilizados de la misma forma por el autor mencionado; se los emplea, sin más. No se hace, en principio, Historia de un autor, de una época, de una materia. Se construye esa materia. En lo que aquí nos ocupa, Matemática y Filosofía de la Matemática.

En este punto, sí quiero hacer constar el manejo de un término que hoy posee multitud de acepciones y que permite afirmar una influencia kantiana: el de constructivismo. Y es la insistencia de Kant en que la Matemática, el conocimiento teórico, es una construcción de la razón humana. No mera generalización inductiva, no mera consecuencia de la sola experiencia sensorial como querría Hume. La Matemática, el conocimiento empírico, surge de las impresiones de los sentidos, pero no viene dado en esas impresiones. Si bien las impresiones sensibles proporcionan la materia prima para el conocimiento, esas impresiones han de ser reguladas por principios regulativos que el sujeto cognoscente, la razón constructiva del sujeto, incorpora o establece. Con palabras de Poincaré: no todo viene dado en la naturaleza. Construcción como interacción interrogativa, activa, entre lo dado y la razón reguladora.

Insistencia de Kant en el uso constructivo de la razón pura, ciertamente. Algo reconocido como influencia 'positiva' en el hacer teórico, científico, a lo largo del siglo XIX, del XX. Con palabras de Popper:

> *Al destacar el papel desempeñado por el observador, el investigador, el teórico, Kant dejó una impresión indeleble no sólo sobre la filosofía, sino también sobre la física y la cosmología. Hay un clima kantiano de pensamiento sin el cual no serían concebibles las teorías de Einstein o de Bohr...* (Conjeturas y refutaciones, 226. Cap. 7, que recoge la emisión conmemorativa del 150 aniversario del fallecimiento de Kant: 'Inmmanuel Kant: Philosopher of the Enlightenment').

Atribución correcta, pero excesiva y unilateral. No es sólo *clima de pensamiento kantiano*: no se puede olvidar que es también clima creado por otros autores anteriores como es el caso de Voltaire, muchos años antes que Kant, cuando en sus *Cartas filosóficas* había mantenido que es la razón la que dicta el camino para combinar la experimentación con la medición cuantitativa. Y, por supuesto, por autores posteriores que, atacando a Kant, mantienen el carácter constructivo de la razón humana. Es la posición de una gran mayoría de matemáticos. Me limito a citar a Gauss, para quien:

> *La necesidad de nuestra geometría no puede ser demostrada al menos por el intelecto humano. En algún momento futuro, quizás, podamos tener otras ideas acerca de la naturaleza del espacio que, de momento, nos son inaccesibles. La Geometría, por ello, no ha de ser situada con la Aritmética, que es de naturaleza puramente apriorística, sino con la Mecánica.* (Carta a Olbers, *1817).*

La Aritmética, para Gauss, es un producto de la razón humana, un campo de hacer cognoscitivo donde la razón pura establece las leyes y construye nuevos entes como los enteros gaussianos, por ejemplo, que carecen de la propiedad de factorización única —no son euclídeos—, o los complejos, o las clases de congruencias módulo un entero que dan paso a la definición por abstracción o por relación de equivalencia y, con ella, a teoremas de existencia y unicidad de elementos que no pueden darse en la intuición, de elementos que jamás podrán 'construirse' figuralmente, aunque sean construcciones de la razón pura...

Construcción conceptual que también puede realizarse en las geometrías y, así, Gauss elabora una Geometría métrica no-euclídea y desarrolla, en paralelo a Monge y sus discípulos, la geometría diferencial que posibilita hablar de espacios con curvatura distinta en cada punto o constante en todos ellos lo que lleva a considerar espacios de curvatura constante igual a cero como en el caso de la geometría métrica euclídea o de curvatura constante positiva, o negativa... Construcciones de la razón humana para las cuales no hay elemento figurativo o intuitivo alguno, por lo que han de desarrollarse de manera deductiva, racional y, como no hay elemento figurativo, esa razón no puede dictaminar si el espacio tiene una u otra construcción, una u otra curvatura de manera *a priori*, sino que habrá que averiguar experimentalmente cuál sea tal curvatura, cuál sea la estructura, métrica o no, que posee el espacio físico, el que nos rodea. Estructura que, por supuesto, puede ser muy diferente de lo que, como sujetos en ese espacio, percibimos.

Diferencia entre construcción conceptual, propia del matemático, y atribución de una de tales construcciones bien al espacio físico, bien al espacio perceptivo, que se presentan, al matemático, como entidades distintas entre sí. Diferencia que no hacen los filósofos, incompetentes en el hacer matemático, como insistirá Gauss cuando en carta de 1844 dirigida a Schumacher, director del Observatorio de Kiel, escribe:

> *Se ve lo mismo (incompetencia matemática) en los filósofos contemporáneos Schelling, Hegel, Nees von Essenbeck, y sus seguidores; ¿no terminan quedando en el aire con sus definiciones? Lea en la historia de la filosofía antigua lo que los grandes hombres de esos días —Platón y otros (exceptúo a Aristóteles)— daban como explicaciones. Ni Kant mismo es mucho mejor; en mi opinión su distinción entre juicios analíticos y sintéticos es una de esas cosas que terminan en una trivialidad o son falsas.*

Incompetencia matemática de unos, no creadores en el hacer matemático, que no impide que los matemáticos establezcan un clima de constructivismo que llevará a Dedekind a señalar que el hombre es de raza divina y lo mismo que construye trenes o barcos, construye o crea objetos matemáticos.

Kant a través de un espejo

Junto a autores como Frege, Hilbert, Poincaré... antes mencionados, y otros que siguen esa línea de creación propia, se encuentran las llamadas a Kant de quienes estudian bien a Kant, bien la Filosofía de la Matemática, bien la Historia de la Filosofía en general. Y, aquí, se me presentan varios apartados en los que esos autores pueden situarse en cuanto a las interpretaciones o atribuciones que realizan sobre Kant y la Matemática:

a. Aquellos que consideran que Kant pertenece a la Prehistoria de la Filosofía de la Matemática, ya que ésta comienza, en sentido propio, en Frege. Es una afirmación tópica que se tiene, explícita, en Aspray-Kitcher.

b. Quienes consideran que la Filosofía de la Matemática es algo secundario en el sistema filosófico kantiano y, además, lo más flojo del mismo. Es una posición que viene sostenida desde Couturat, Russell hasta Parsons, Steiner... Lo más flojo y, además, impotente para justificar el hacer matemático como el plasmado en las geometrías no-euclídeas o la Teoría de conjuntos. Pero, al ser tema secundario, esta debilidad no afecta al sistema total kantiano.

c. Apoyado Kant en la doble articulación lógica formal-lógica trascendental o, en términos muy posteriores, lógica-lingüística y epistemológica, la aparición de lo sintético *a priori* se muestra como una articulación radicalmente forzada —al menos desde Gauss y Riemann—. Lo que se tiene es, realmente, juicios analíticos *a priori* y sintéticos *a posteriori*; nada más. La posición kantiana, así, inaceptable como intento de fundamentación del conocimiento científico. Es posición que se incardina, posteriormente, en el neopositivismo, con una nueva arquitectónica de las ciencias escindida en Ciencias formales y Ciencias fácticas y con la problemática originada desde Quine y Putnam, al menos, acerca de la indispensabilidad de la Matemática para el conocimiento científico...

d. Como una 'revuelta' contra la posición heredada que supuso el rechazo de lo kantiano y que se inicia en Couturat y Russell y se refleja en los actos conmemorativos del centenario de la muerte de Kant, 1904, o el rechazo mencionado en el punto anterior, y aprovechando en cierta manera el ciento cincuenta aniversario de la muerte —1954—, el segundo centenario de *Crítica de la razón pura* —1781-1787—, han surgido trabajos de vindicación kantiana en la línea historicista. Una posible motivación, las limitaciones de los formalismos tras la difusión de los resultados de los teoremas de Gödel, de Tarski... y los intentos de superar tales limitaciones, los intentos de establecer un hacer matemático sin pretensiones de una radical fundamentación, ya definitiva. Trabajos en los cuales algunos autores intentan, desde una posición pretendidamente kantiana, dar cuenta de saberes matemáticos como los contenidos en las geometrías métricas no-euclídeas, en las teorías de conjuntos; en general, en los contenidos matemáticos distintos a los manejados en la época kantiana. Y se tiene básicamente a Hintikka, Beth, Lorenzen... o a alguno de los autores contenidos en la antología de Posy como Baker...

* Dos enfoques en este recurrir, en esta llamada a Kant en los terrenos de la Matemática, de la Filosofía de la Matemática: Recurso a, historia de. Situándonos en este segundo enfoque, mantengo unas aseveraciones:

a. La Filosofía de la Matemática no comienza en Frege. La problemática que el hacer matemático plantea a la razón, tanto en su aspecto ontológico como en el epistemológico y metodológico ha sido permanente y desde su origen aunque por razones personales electivas pueda empezarse en uno u otro autor determinados. Es lo que hará, por ejemplo, Ewald (1996).

Y esta problemática ha conducido, incluso, a que el hacer matemático se convierta en elemento originario para la filosofía en muchos autores. Kant se incardina, plenamente, en esta corriente, al igual que otros matemáticos como Lázaro Carnot con sus *Réflexions sur la métaphysique du*

Calcul infinitésimal (1787), como Euler, como después Frege o Husserl, entre otras cosas porque Kant parte, en su labor, desde una ocupación de filósofo natural, de cosmólogo, de profesor de todo tipo de disciplinas 'naturales', aunque su objetivo final sea la metafísica.

Desde esa ocupación uno de los problemas es dar cuenta de unos hechos: la existencia de un hacer matemático, la existencia de un hacer físico posibilitado por ese hacer matemático. Haceres que permiten un conocimiento de la *physis*, de la naturaleza. Y, en esta línea, Kant pretende trasladar lo geométrico a lo metafísico como intentará en distintos opúsculos —y cito en particular su *Ensayo para introducir las magnitudes negativas en la filosofía* de 1763— admitiendo que la matemática es una ciencia totalmente segura, lo que no ocurre en la metafísica que, aunque no pueda imitar a la matemática, podría servirse de la misma para obtener un posible fundamento de principios como el de causalidad o alcanzar el conocimiento de Dios...

Y una pregunta que se convierte en originaria para la filosofía es la de cómo es posible tal conocimiento, cómo es posible el hacer matemático, el hacer físico; o, en variante, cuáles son sus principios metafísicos, dónde se fundamentan. La Matemática, como una parte de la filosofía natural, se convierte no sólo en problemática sino en elemento originador del sistema filosófico kantiano. Unos conocimientos que se apoyan en principios que la razón, dirá Kant, somete continuamente a prueba:

> *pues los ensaya en la piedra de toque de la experiencia* (Carta a Herz de 21-2-72).

b. Establezco otra tesis, más radical: la obra kantiana, especialmente *Crítica de la razón pura,* aparece como una articulación o respuesta a los problemas que plantea un cierto tipo de hacer matemático, de conocer científico. En otras palabras, no sólo un cierto tipo de hacer matemático se me muestra como originador del pensamiento kantiano, sino como constitutivo del mismo. Y si falla la respuesta a la problemática que plantea ese núcleo constitutivo, es el sistema kantiano el que se viene abajo, aunque puedan mantenerse algunas parcelas, sectores o ideas particulares. Núcleo esencial porque es desde la respuesta al mismo desde la cual Kant va a elaborar una crítica de la razón pura, desde la cual pretende:

> *disciplinar la razón, para refrenar su tendencia a transgredir los estrechos límites de la experiencia posible...* (carta a Herz citada)

Disciplina de la razón que permita establecer los límites y las barreras que muestran tanto la Experiencia Sensorial como la Razón tomadas aisladamente...

Son dos aseveraciones que, claramente, se contraponen a alguna de las posturas mencionadas anteriormente. Pero conviene, aquí, una precisión: si digo que Kant pretende establecer los límites del conocimiento y, así, del hacer matemático, desde que se averiguan tanto los mecanismos como los fundamentos de ese conocimiento, desde que se sabe lo que lo posibilita, he agregado 'de cierto tipo de hacer matemático'.

Cuando se intenta una aproximación a un tema como el de *Kant y la Matemática* hay que tener en cuenta que en esa aproximación hay, al menos, dos aspectos: claramente Kant, pero también Matemática. Y al tener en cuenta este último, hay que eliminar la idea de que el hacer matemático se plasme de manera única. Hay diferentes tipos de hacer matemático que poseen aspectos epistemológicos, metodológicos, ontológicos y estilos distintos. Con núcleos conceptuales que nada tienen que ver entre sí. Y el hacer matemático en el que Kant está inmerso es uno de esos tipos, por modo exclusivo. Es el Hacer Figural. De aquí que Kant, en su posición no va, no puede ir más allá. Es su propia y gran limitación. Limitación que, por otro lado, condiciona todo su sistema.

2. EL HACER MATEMÁTICO Y KANT

Y para alcanzar una relectura coherente de esa relación entre Kant y la Matemática, se hacen necesarias unas previas precisiones.

El entorno ilustrado Matemático...

Lo primero, recordar que Kant es un prototipo de la Ilustración. De un movimiento al que precisamente Kant da nombre, y que caracteriza en palabras como:

> *La ilustración es la liberación del hombre de su culpable incapacidad.* La *incapacidad* significa la imposibilidad de servirse de su inteligencia sin la guía de otro. Esa incapacidad es culpable porque su causa no reside en la falta de inteligencia sino de decisión y valor para servirse por sí mismo de ella sin la tutela de otro. *¡Sapere aude!* ¡Ten el valor de servirte de tu *propia* razón!: he aquí el lema de la ilustración. (*¿Qué es la Ilustración?* 1784: 25. Subrs. de Kant).

Años antes d'Alembert, 1759, va a sostener:

> *Nuestro siglo se llama... el siglo de la filosofía por excelencia...*

'Siglo de la filosofía' que se apoya en el descubrimiento de un nuevo método de filosofar que ha conducido a una *revolución científica* en matemáticas, en astronomía. D'Alembert señala que ese método correcto se debe a una clave: el empleo de la razón; y el modelo de la misma es la matemática.

Una precisión: el término filosofía. Se presta a equívocos. La filosofía a la que se refiere D'Alembert es la 'filosofía natural' frente a la 'filosofía revelada'. Y la filosofía natural tiene un objetivo: conocer la *physis*. No existía la llamada 'filosofía de los profesores' en términos posteriores de Nietzsche. El filósofo natural es el que se dedica a la *physis* en la misma línea que indicara Newton en su *Philosophia naturalis principia mathematica*. Línea que, a la vez, marca el modelo para tal filosofía: la razón matemática, sus principios, sus métodos. Razón propia del individuo humano que, al manejarla, se libera de su 'culpable incapacidad', de lo que impone una 'filosofía revelada' hasta el extremo que, desde esa razón, puede llegar a demostrar la existencia de un ser supremo sin acudir a lo revelado que los libros sagrados manifiestan.

Por su lado, la razón matemática entrañaba, en cuanto método, dos aspectos: por un lado, el de análisis o resolución; por otro, el de síntesis o composición.

El aspecto de análisis es el ligado, de modo clásico cartesiano, al descubrimiento. Bien entendido que a un descubrimiento de carácter psicológico, dado que al descomponer un teorema, un problema en sus partes, no se agrega nada nuevo, sino que ese análisis posibilita hallar los elementos que permiten la resolución del problema, la prueba del teorema. Analizar no supone otra cosa que descomponer en sus partes una proposición, un problema y estudiar la relación de tales partes.

> (Ejemplo elemental: hallar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto y de una recta en el plano. Se supone resuelto ese lugar y, analizando, se ven las condiciones que cumplen sus puntos).

Por su lado, la síntesis consiste en recomponer la proposición pedida. Recomposición en la cual puede tener que utilizarse algún elemento nuevo. Es una construcción que va desde las partes al todo. Esa construcción se manifiesta no sólo en la resolución de los problemas, sino también en las pruebas euclídeas en las demostraciones contenidas en *Elementos* de Euclides. En el hacer matemático ejemplar, el geométrico, no se tienen, realmente, demostraciones sino construcciones. Y si alguno pretendiera realizar una demostración al estilo lógico, empleando un modelo como el silogístico, no lograría nada en el hacer matemático. Desde el siglo XVII se insistirá en el hecho de que ese tipo de demostración, estilo apagógico, no agrega nada nuevo y que si Euclides lo utilizó fue para convencer a los sofistas y no por su necesidad en el hacer matemático.

Estoy afirmando, así, la convicción que tenían los geómetras, los matemáticos de la separación de la Matemática respecto a lo que se denominaba lógica. Una lógica propia de las escuelas y de un pensamiento considerado tradicional ajustado a lo establecido en la teoría del silogismo plasmada por Aristóteles. Lógica silogística que se mostraba, en el fondo, inservible para el hacer matemático. Y la separación Lógica-Matemática, lugar común entre los geómetras, será adoptada por Kant como una más de sus tesis.

Análisis-Síntesis son los dos métodos tradicionales del hacer matemático que van a ser adoptados por la filosofía natural. El descubrimiento de su aplicación a esta filosofía 'natural' es lo que ha hecho que la misma pueda desarrollarse en todos los campos del saber.

Es lo que manifestará, por ejemplo, Lavoisier al describir el método experimental que debe utilizarse en Química: lo experimental en química no es más que la aplicación de los dos aspectos de la razón matemática. Y Lavoisier describe un experimento ejemplar en el que analiza, descompone la atmósfera en sus partes y, después, las sintetiza de nuevo, las reúne para construir un aire no muy diferente del atmosférico. La parte constructiva, claramente, la sintética.

Pero donde el método ha mostrado toda su potencia ha sido en el Cálculo infinitesimal, el Análisis por excelencia. Un Análisis que ha permitido explicar el movimiento, establecer sus leyes a través de partes infinitesimales, a través del desarrollo en serie de la función asociada al movimiento del cuerpo. Plasmado a partir de Euler en ecuaciones diferenciales asociadas, conduce a la integración de las mismas. Y, con ello, a resolver problemas de Mecánica y Astronomía.

Explicación del movimiento sólo factible desde ese Análisis y síntesis, porque el movimiento uniforme se quiere como el estado natural de los cuerpos y es la aceleración, no la velocidad, la que explica el cambio de movimiento. Y si la velocidad es la primera derivada del espacio respecto al tiempo, la aceleración es la segunda derivada...

Explicación del movimiento, constitución de la Dinámica a partir de unos primeros principios 'matemáticos' como el de la ley de inercia, el de las masas, el de la interacción entre los cuerpos manejando un método de análisis y síntesis reflejado en el cálculo de fluxiones, en el análisis diferencial e integral... Reflejo que plasma Euler en lo que hoy se conoce como Mecánica newtoniana mediante una formulación analítica que abandona lo geométrico sintético newtoniano y que se continúa en la obra de Lagrange, de 1788, *Méchanique analitique*, con las 'ecuaciones de Lagrange' que reemplazan a las tres de Newton y en cuya obra, según la confesión del autor, no hay cifras y los métodos utilizados no requieren construcciones, ni razonamientos geométricos o mecánicos, sino solamente operaciones algebraicas sometidas a un desarrollo regular y uniforme. Línea analítica, aunque no tan formal algebraica, que culmina con la *Mécanique celeste* de Laplace cuyo primer volumen se edita en 1799.

Y el conocimiento que se manifiesta en la Mecánica, tanto en los problemas ligados a los fenómenos terrestres como en los astronómicos, no procede de la experiencia, de lo empírico, sino que viene establecido por la razón, al manejar las cualidades primarias de los cuerpos —fuerza, masa, aceleración...—, no las secundarias, las perceptivas...

La razón matemática no se enfoca como meramente constructiva de objetos y pruebas matemáticas, no es sólo elaboración con lápiz y papel. La Matemática, a lo largo del XVIII, presenta un papel de instrumento revolucionario y no sólo para la emancipación del pensamiento individual. La razón plasmada en la Geometría, en la Mecánica, se toma, incluso, como instrumento militar. Recuerdo cómo la Geometría Descriptiva creada por Monge se considera secreto militar en la Escuela de Mèzieres y luego en la Politécnica o en la Escuela Normal: gracias a esa Geometría, los ingenieros militares, los politécnicos, pueden levantar los planos de las fortificaciones enemigas sin quedar al alcance de su fuego... Serán los geómetras, algunos geómetras, los 'organizadores de la victoria', por supuesto republicana.

La Mecánica, a su vez, es tomada por Voltaire —para no citar a otros— como el ejemplo de lo que puede la razón frente al dogmatismo tanto cartesiano como escolástico, al dogmatismo impuesto por el régimen real... Será tomada por Kant frente al dogmatismo de las instituciones eclesiásticas, no de la religión, para tratar de la cosmología...

Ahora bien, esa razón, en su manejo, muestra una faceta no siempre tenida en cuenta: la de tener que someterse a la prueba de la *physis*. La Geometría Descriptiva de Monge se somete a prueba en cada ocasión en la que se tenga que levantar el plano de una fortificación enemiga...

Es faceta que se puede ver más nítidamente en otro terreno. He citado a Voltaire en las *Cartas filosóficas* donde señalará que la razón permite establecer el experimento y lo que en él hay que medir y lo que en el experimento hay que interpretar. Voltaire se hace eco de la disputa entre dos concepciones en juego: la cartesiana y la newtoniana. Cada teoría permite predecir una forma para la Tierra: la newtoniana indica que la Tierra ha de ser achatada por los Polos; la cartesiana, alargada por los Polos. Es la Teoría, no la experiencia, la que dice cuál es la forma de la Tierra.

Pero se tienen teorías rivales. Poco después de esas *Cartas,* La Academia de Ciencias francesa planea un experimento para poner a prueba los principios de ambas teorías. En 1735 La Condamine parte hacia Ecuador; en 1736, Maupertuis y Clairaut, con Celsius, hacia Laponia. Resultado de este *'experimentum crucis'*: Newton, achatador de la Tierra.

No sólo la razón teórica tiene su éxito mediante la comprobación experimental antes mencionada: se plantea la explicación de los movimientos de la Luna que conduce, realmente, al problema de los tres cuerpos y donde polemizan, mediante el establecimiento de las fórmulas matemáticas correspondientes, Clairaut, Euler, d'Alembert entre 1747 y 1752; o surge la estabilidad del sistema solar a cuyo problema intenta dar repuesta Laplace entre 1785 y 1788...

La razón matemática dicta, ciertamente, lo que hay que experimentar y lo que hay que interpretar en el experimento; pero está sometida, o se somete, a lo que lo experimental termine decidiendo...

Se tienen, así, como partes del Hacer matemático, la Geometría, el Análisis diferencial e integral, la Mecánica, por supuesto la Aritmética y el Álgebra. En el fondo, disciplinas como instrumentos para lo que considerar tema esencial o de moda: la filosofía natural, el conocimiento de la *physis* con unos métodos, analítico o diseccionador, sintético o constructivo.

...y en ese entorno, Kant

Y es a la Filosofía natural, al conocimiento de la *physis* y en paralelo y condicionado por los geómetras ilustrados, a la que acude Kant. Entre otros ensayos, en 1755 publica *Historia general de la naturaleza y Teoría del cielo* que lleva por subtítulo 'Ensayo sobre la constitución y el origen mecánico del universo, tratado de acuerdo con los principios de Newton'. Las historias de la filosofía al uso indicarán que pertenece al período precrítico y que, en ella, Kant combina la noción de espacio absoluto de Newton con la relacional de Leibniz; o, incluso, alguno más radical pretenderá que se adelanta al materialismo dialéctico ante la afirmación en él contenida y mantenida de:

> *Dadme sólo materia y os construiré con ella el mundo* (pp. 19, 20).

Son afirmaciones que pertenecen, desde mi punto de vista, a lo anecdótico. El ensayo kantiano, un sueño filosófico, es importante, no voy a decir que quizá más que toda la filosofía crítica posterior. Muestra a Kant todavía joven y a la espera de una posición académica estable, creador de hipótesis cosmológicas: la que hoy se considera como 'hipótesis de Kant-Laplace acerca del origen del Sistema solar'. Aunque Kant hable de hipótesis y reconozca que lo ideal sería una presentación:

> *Al estilo del método matemático, con todo su característico despliegue de razonamientos y con mayor evidencia de la que se emplea en materias físicas* (p. 65).

Está convencido de lo adecuado de sus tesis, porque en su capítulo VIII, afirma:

> *Espero fundar sobre argumentos irrefutables una convicción segura: primero, que el mundo reconoce como origen de su formación un desarrollo mecánico derivado de las leyes generales de la naturaleza; y, segundo, que la forma de la creación mecánica que hemos presentado, es la verdadera* (pp. 166-167).

Creación mecánica del mundo que no se limita al sistema solar. Hecho observado, Wright ha manifestado en 1751 el movimiento de las estrellas fijas y ha establecido que la Vía Láctea no es un cúmulo, sin más, de masas sino que es un conjunto armonioso de estrellas parecido al que forma el sistema solar. A su vez, Maupertuis ha divulgado que las nebulosas son masas ovaladas, figuras elípticas de estrellas. De aquí que, para Kant, toda la Vía Láctea pueda representarse como un Sistema solar gigantesco con miles de planetas y miles de satélites. Como problema, establecer la estructura de ese sistema universal desde el estado primigenio de la naturaleza apoyándose exclusivamente en las leyes de la Mecánica. Kant, ligado a la praxis científica de su actualidad, aceptando la metáfora del mecanicismo como elemento conceptual e ideológico primario, establecerá que el sistema solar evolucionó a partir de una masa de gas incandescente en rotación. Esa masa, por enfriamiento y consecuente contracción, fue aumentando su velocidad de giro. Como consecuencia, se acható por los polos y expulsó masa que se convirtió en los planetas pero, antes de tal conversión, esa masa, repitiendo el proceso, dio paso a los satélites.

Como hipótesis de partida Kant indica:

> *Presumo la dispersión total de la materia del universo y hago de ella un caos completo. Veo formarse la materia de acuerdo con las leyes definidas de la atracción y modificarse su movimiento por la repulsión* (p. 15).

El proceso posibilita la creación de muchos sistemas solares y, en ellos, de muchos planetas con sus satélites correspondientes. Inmediato problema, al que Kant dedica la Tercera Parte, es la de si pueden o no estar habitados esos planetas y qué características podrán tener tales habitantes...

Años después, 1796, Laplace, en *Exposición del sistema del mundo*, en la misma línea kantiana, es decir, sin cálculos matemáticos justificativos, establecerá lo que se estimó primera representación cosmogónica de la naturaleza de carácter científico. Y lo que establece Laplace es, en el fondo, la misma hipótesis kantiana aunque su punto de partida sea la nebulosa como materia prima. En homenaje a ambos esta hipótesis del origen no ya del sistema solar o de la Vía Láctea, sino de cualquier nebulosa, recibe el nombre de 'hipótesis de Kant-Laplace'.

Por supuesto Kant es ilustrado y deísta. Su trabajo, por su concepción básica mecanicista, podría ir en contra de la religión. Kant no se limita, como hará Laplace, a mantener una hipótesis. El objetivo último parece, en Kant, dar una demostración de la existencia de un ser supremo, fundamento de la ley moral, sin recurrir a la revelación manifestada en la Biblia. Argumento cosmológico kantiano muy en línea de los ilustrados, para los cuales como las leyes de la naturaleza habían sido escogidas por Dios libremente para su creación, debían ser descubiertas mediante el experimento y, con ese descubrimiento, lo que hacía el filósofo natural era demostrar, racionalmente, la existencia de quien había escogido tales leyes...

1768, y menciono otro ensayo kantiano que, para los lectores filosóficos, supone un abandono de las posiciones relacionales del espacio en beneficio de unas posiciones de espacio absoluto. Al igual que antes, consideraciones de carácter más bien anecdótico. Lo importante en *Del primer fundamento de la diferencia de las regiones del espacio* es una contribución kantiana a un problema muy difícil. Estamos acostumbrados a vernos ante un espejo —unos para afeitarse, otros para iluminarse, otros...—. Y, ante el espejo, lo que se tiene es una simetría especular. Afirmación trivial.

Si en lugar de espejo hablamos de las manos, podemos enfrentarlas, la derecha con la izquierda. Y se ve que las relaciones que se tengan entre puntos de la mano izquierda van en paralelo con los correspondientes de la derecha. Ahora bien, y aquí se centra la observación no trivial kantiana: el guante de la mano izquierda no sirve para la mano derecha, ni el guante de la mano derecha sirve para enfundar a la mano izquierda. El espacio se encuentra orientado. Orientación del espacio que implica que en el mismo hay una derecha y una izquierda, un arriba y un abajo... y ello en un sentido absoluto.

Orientación que se conoce, aquí sí, desde lo perceptivo, desde lo experiencial y que no tiene correlato en la previa concepción del espacio. El espacio absoluto newtoniano no es que sea absoluto, es que es un espacio métrico euclídeo y, por ello, homogéneo, isótropo, ilimitado, vacío... No cabe esperar en él, de antemano, orientación alguna. Sin embargo, los guantes indican que esta orientación espacial existe.

También en el plano hay simetría, ahora axial. Es simetría que cabe explicar sin más que realizar un movimiento en el espacio de tres dimensiones que cambia la orientación del plano. Con los guantes estamos en un espacio de tres dimensiones. No hay, por ello, posibilidad de tal transformación salvo aceptar la existencia de un espacio de cuatro dimensiones en el que este espacio esté inmerso. Y aunque algunos geómetras ilustrados admitan, conceptualmente, espacios de cuatro dimensiones, Kant no llega a tanto.

Una observación: es la intuición la que percibe el hecho de la simetría, la que distingue derecha e izquierda en un espacio en el que, conceptualmente, no hay lugar para tal distinción; quiero decir, la experiencia frena, de alguna manera, la especulación matemática o física, la atribución de unas propiedades absolutas a un elemento como el espacio.

Son temas, origen y conformación del sistema solar, de las nebulosas, orientación del espacio, incardinados en los temas de la época. Pero también está el de asegurar o no la existencia del espacio absoluto porque si el movimiento se caracteriza en función del cambio de velocidad —en magnitud o en dirección—, es decir, en función de la aceleración, este cambio se tiene respecto a algo, respecto a un espacio absoluto —como señala Newton— o respecto a un sistema referencial previamente establecido —como hace Euler—. Y Kant, en el último ensayo mencionado, lo hace en la línea euleriana pero tomando como origen referencial el cuerpo del sujeto.

Los principios matemáticos en los que se apoya la Mecánica exigen, por implicación, la existencia del espacio absoluto o la de un referencial dado. Newton ya había señalado la dificultad de establecer la existencia del espacio absoluto e imagina el experimento de la rotación del agua en un cubo también en rotación. Como la prueba experimental de este espacio absoluto es difícil, los geómetras del XVIII pretenderán encontrar otras vías, de carácter conceptual más que experimental, para la fundamentación de estos principios. Así Euler, dubitativo ante la existencia del espacio absoluto —existencia marginada, por otro lado, en cuanto a su papel en la práctica de la Mecánica—, esbozará un esquema demostrativo en la línea siguiente: si fuera posible demostrar la necesidad lógica de la ley de inercia, entonces se derivaría la necesidad lógica del espacio absoluto. En polémica, d'Alembert sugiere que es el principio de razón suficiente el que permite fundamentar la ley de inercia y, con él, por implicación, la existencia del espacio absoluto... Por su lado, en 1745, Maupertuis, en la alocución como Presidente de la Academia de Berlín, establecerá *Las leyes del movimiento y el reposo deducidas de un principio metafísico*; principio metafísico de acción mínima con el cual llegaba a demostrar, simultáneo, la existencia de Dios.

Tenemos, así, una búsqueda continua en la formulación de algún *principio metafísico de la ciencia de la naturaleza.* Que es el título del ensayo de Kant, 1786, en el que sigue las líneas de Euler, de d'Alembert, de Maupertuis, para justificar los principios matemáticos newtonianos, para tratar de dar cuenta de su necesidad lógica... Esquema demostrativo en el que se parte de la aceptación de la necesidad lógica de los principios matemáticos para asegurar la posibilidad conceptual de otras nociones. Y es uno de los esquemas que Kant incorpora como clave en la *Crítica.*

Por otro lado, si un cosmólogo trata de explicar cómo se origina un sistema como el solar, se encuentra con un problema inmediato: el tiempo en el que se ha conformado; y si hubo un antes y un después, si terminará ese sistema en el tiempo... La razón pura, aquí, no consigue poner a prueba lo que ella misma establece; aún más, puede alcanzar argumentaciones contradictorias entre sí. El sueño de la razón produce monstruos. Y son las antinomias de la razón kantiana. Antinomias que le condujeron, según confesión propia de Kant, a establecer los límites de esa razón, a establecer una Crítica de la razón pura.

Con lo anterior creo que he indicado —aunque quizá de modo implícito— cuál es la posición de Kant, como un miembro más de la Ilustración, en cuanto a la razón matemática, sus métodos, sus temas, los problemas que encierra, sus contribuciones originales a este tipo de hacer y su aceptación explícita de la gran metáfora-raíz ilustrada, el Mecanicismo.

Con una precisión: Kant se liga a la Geometría, a la Aritmética, básicamente a la Cosmología pero no al Análisis matemático ni al lenguaje algebraico, formal, en la línea que seguirán Euler, Lagrange, Carnot... ni, por supuesto, a desarrollos intrínsecos de la Mecánica ni de la Matemática en general.

Precisión que hay que completar con otra: Kant no domina, no maneja la matemática de su época. Le gustaría la presentación de sus hipótesis «al estilo del método matemático», pero no da el paso exigible para tal presentación. De aquí su refugio en el 'manejo' de un cierto tipo de imagen matemática: el modo de argumentación geométrico, al modo que antes lo hiciera Espinosa. Y ello en función, siempre, de pasar a la *aplicación filosófica* de sus conceptos, lo cual implica una ausencia de dominio real, de conocimiento de la matemática de su época. Cabría indicar que también se da un cierto desconocimiento de la propia Mecánica newtoniana cuando se ven sus confusiones en la identificación del cambio de velocidad con el cambio de aceleración —basta verlo en su ensayo *Uso de la metafísica unida con la geometría en la filosofía natural, cuyo primer bosquejo contiene la Monadología física*, tercera disertación que Kant presenta para acceder a la cátedra de Matemáticas y Filosofía, en 1756, o en la omisión que hace de la segunda ley newtoniana, precisamente la que establece la relación entre las tres magnitudes básicas de fuerza, masa y aceleración, en su intento de fundamentar, desde una parte pura sintético-*a priori*, y según sus propias leyes, la Mecánica en 1786, en *Principios metafísicos de la ciencia de la naturaleza*—.

En cualquier caso, la praxis matemática del momento implica manejar construcciones que se elaboran a partir de unos datos o unas proposiciones particulares, especificadas, concretas. Con la problemática de que tales construcciones han de ser generales, universales y no propias del objeto que se dibuje o trace en el papel, en la pizarra; de las cifras o palitos con los que se compongan unas sumas, unas multiplicaciones; de la fórmula concreta de la ecuación diferencial de Clairaut o la de d' Alembert...

3. LA FUNDAMENTACIÓN KANTIANA DE LA MATEMÁTICA

Esas construcciones, en lo geométrico, se realizan en el espacio. Pero el espacio, en Kant, y desde que se le plantea la problemática de su orientación, desde que se plantea la fundamentación de los primeros principios, deja de ser problema físico y se convierte en problema metafísico: y, desde este enfoque metafísico, cabe considerar al espacio como la condición para que se puedan establecer los principios matemáticos que den cuenta del movimiento, principios como el de inercia o el de interacción. Precisamente es lo ya planteado por Euler, por d'Alembert.

Pero, en Kant, como solución, se convierte en la condición para que el sujeto pueda tener cualquier tipo de experiencia: es la condición de posibilidad para que pueda enfrentarme en el espejo y ver mi imagen, mi reflejo en él, sabiendo que la imagen y yo tenemos orientaciones opuestas y que nada permitirá intercambiarnos, sustituirnos. El espacio se convierte en condición de posibilidad, en elemento trascendental.

Hay, aquí, una distinción subyacente: la que existe entre la posibilidad de conocer y la necesidad de fundamentar dicho saber. Y es esta segunda línea a la que, desde enfoques ligados a los de Euler o d'Alembert últimamente mencionados, se dedica Kant, invirtiendo, por decirlo así, el problema: el hacer matemático, el hacer científico son posibles; pero ¿cuál es la condición de dicha posibilidad, en qué se fundamenta la misma? Junto a la condición metafísica tradicional Kant agrega, en esta inversión, la que denomina trascendental.

Condición metafísica, condición trascendental que llevan a Kant a un enlace indisoluble entre la noción de espacio y la geometría. El espacio, como condición de posibilidad de la experiencia, ha de estar regulado por leyes, normas, principios. Y estos principios, en lo espacial, vienen dados a través de la Geometría. Son los postulados geométricos los que, en el fondo, posibilitan la experiencia espacial. Principios que, si regulativos, han de poseer las notas de universalidad y, por supuesto, de necesidad. De aquí que los postulados geométricos tengan que ser, por regulativos, previos a cualquier experiencia a la que, precisamente, regulan. Han de ser, por ello, *a priori*.

Experiencia que realiza el sujeto epistémico en el cual esas condiciones se convierten en sus formas de sensibilidad. Formas *a priori* de la percepción, posibilitadoras de cualquier experiencia y, por ello, previas a dicha experiencia. Al no depender de los datos particulares de la sensación, esas formas poseen la nota de universalidad.

Los argumentos se plasman en la *Estética trascendental,* escindidos en dos bloques expositivos acerca del 'concepto' espacio con su paralelo respecto al 'concepto' tiempo. Cuatro argumentos metafísicos y uno trascendental.

Los argumentos metafísicos, brevemente, son

1. El espacio no es un concepto empírico que se derive de la experiencia externa ya que cualquier sensación referida a algo externo presupone la noción de espacio.
2. El espacio es una percepción *a priori* necesaria: no podemos imaginar que no haya espacio aunque podamos imaginar que haya espacio vacío.
3. El espacio no es un concepto —como animal, mesa— ya que si hablamos de espacios hablamos de partes del espacio.
4. El espacio es una magnitud infinita: como un común a un número infinito de individuales posibles contenidos en algo.

El argumento trascendental se puede formular como

5. La geometría es tanto sintética como *a priori.* Sus proposiciones son apodícticas y, por necesarias, no pueden depender de la experiencia, no son juicios de experiencia. Tampoco analíticos porque al realizar el análisis conceptual correspondiente del juicio, las notas del predicado no están contenidas en las notas del sujeto. Son juicios ampliativos, constructivos, son sintéticos. Así, que el espacio tenga tres dimensiones es una proposición sintética *a priori,* necesaria y universal.

El argumento trascendental no es, realmente, argumento alguno sino la manifestación de una convicción, de una creencia que Kant confunde erróneamente con un hecho: para Kant las proposiciones de la geometría son apodícticas; las proposiciones geométricas son verdaderas. Y ello porque la Geometría, desde Euclides, es una ciencia y:

> *Solamente puede ser llamada ciencia en sentido estricto aquella cuya certeza es apodíctica.*

Esta certeza únicamente se da en aquellas ciencias cuyas proposiciones:

Van unidas por la conciencia de su necesidad (B 41).

Conciencia de necesidad ligada, por modo exclusivo, a los juicios que poseen validez *a priori*. Toda ciencia tiene, a su disposición, juicios analíticos y sintéticos desde el orden lógico; *a priori* y *a posteriori* desde el orden epistémico. Así, la Geometría dispone de juicios analíticos, que han de ser *a priori*, como el principio de identidad, «a=a». Junto a los mismos, la geometría dispone de juicios sintéticos *a priori*, como los plasmados en los axiomas euclídeos. Por sintéticos, proporcionan conocimiento; por *a priori*, regulan dicho conocimiento y lo hacen en regulación necesaria.

Desde esta creencia, desde esta convicción elevada al rango de hecho, Kant ha planteado y ha creído resolver el problema de las condiciones de posibilidad del hacer matemático para fundamentar el mismo.

La solución kantiana se centra en escindir al sujeto en dos facultades: sensibilidad y entendimiento. Dos facultades reguladas por unos principios regulativos: aquellos que conforman *a priori* la sensibilidad y el entendimiento. Los principios de la sensibilidad, aquellos que tratan de la magnitud extensiva, bien discreta, bien continua, han de ser, como formas de dicha sensibilidad, espacio y tiempo. Y como principios de tales formas, como principios regulativos de las magnitudes extensas, los establecidos por los axiomas geométricos y la noción de sucesión continua respectivamente.

A su vez, los del entendimiento vienen establecidos por las categorías del mismo.

Frente al pensar conceptual regido por modo exclusivo por la condición de consistencia y que, al carecer de objeto que caiga bajo ese pensar, no es conocimiento, frente a la sensación o a la imaginación ensoñadora que carece del concepto correspondiente, se encuentra el conocer: un conocer dado, por modo exclusivo, por la unión de sensibilidad y entendimiento. En el lenguaje cotidiano de la Ilustración, el conocer sólo se obtiene de la unión de concepto y experiencia; en el lenguaje kantiano se tiene la misma formulación pero en términos como:

> *Sin sensibilidad, ningún objeto nos sería dado y sin entendimiento ninguno sería pensado. Los pensamientos sin contenido son vacíos, las intuiciones sin conceptos son ciegas... Ni el entendimiento puede intuir nada, ni los sentidos pueden pensar nada. El conocimiento únicamente puede surgir de la unión de ambos* (B 76).

El conocimiento no se produce más que por el dato del objeto que corresponde al concepto. Dato de objeto que corresponde al concepto que se establece, constructivamente, en síntesis, posibilitada por los principios regulativos. Construcción de objetos que, en Kant, se realiza a través de dos procesos: ostensivo y simbólico, sabiendo que:

> *construir un concepto significa exhibir a priori la intuición que corresponde al concepto* (B 741).

La construcción o exhibición del objeto que cae bajo el concepto se realiza a través del esquema que, perteneciendo al entendimiento, es lo que media entre las intuiciones y los conceptos. Esquema con el cual Kant pretende superar las dificultades que supone trazar una figura concreta, particular, cuando esa figura se pretende universal; esquema como regla constructiva con el cual Kant pretende superar la ausencia de criterio previo, explícito, que determine cuáles son las notas pertinentes y cuáles no de las figuras concretas para considerarlas como representativas de lo universal...

Esquematismo o proceso constructivo que en el espacio viene regulado, a su vez, por los axiomas geométricos. Postulados que, para Kant, no son principios de deducción, sino principios que regulan las posibles construcciones que se realicen en el espacio métrico euclídeo.

El ejemplo kantiano de la demostración de la proposición «la suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos» es la más clara mostración de esta concepción. Si se puede trazar una recta por uno de los vértices paralela al lado opuesto, ese trazado es una construcción posibilitada por el postulado V de las paralelas; construcción conducida por la propia regla constructiva —el esquema ostensivo correspondiente— que ha llevado a trazar el triángulo. No se deduce de este postulado la acción de trazar dicha paralela; el postulado lo que indica es que tal acción es posible.

Confusiones kantianas

Podría admitirse, y con muchas reservas, alguno de los argumentos metafísicos —desde luego no el del infinito salvo con previas aclaraciones y distinciones entre ilimitación e infinitud, que supone diferenciar conceptos 'cualitativos' o topológicos y 'cuantitativos' o métricos, algo que no hace Kant y que invalidan tanto la problemática de sus antinomias como la consecuencia que desde la ilimitación=infinitud obtiene sobre la unicidad del universo...—.

En ningún caso cabe admitir el argumento trascendental en el que Kant identifica los principios regulativos del espacio con los principios regulativos de una determinada geometría, sea métrica-euclídea o no. Identificación kantiana, además, de espacio conceptual, espacio perceptivo y espacio físico.

Con Gauss se puede mantener que no hay demostración de la necesidad de la Geometría métrica euclídea o de cualquier otra geometría, sea métrica o no. La necesidad que se pretende ligada con las proposiciones de la geometría métrica euclídea es un engaño. La conciencia de tal necesidad, que es a lo que acude Kant, no es más que una influencia educativa que no siempre se ha tenido, por otro lado. Conciencia de necesidad que lleva a Kant a una confusión radical, a un error lógico infantil: el establecimiento, como dato previo, de la Geometría métrica euclídea para construir la Mecánica newtoniana, respalda en Kant la necesidad de dicha geometría métrica como propia del espacio. Pero, necesaria para la construcción de la Mecánica newtoniana, no tiene por qué ser necesaria en sí. Ni siquiera en el caso en el que, nuevo error kantiano, considere a la Mecánica newtoniana como la única que sigue la *physis*, como la única teoría científica 'verdadera' y de tal manera que el conocimiento de la misma sea una mera representación isomorfa de dicha *physis*.

Y menos aún que la geometría métrica euclídea sea la condición perceptiva de nuestra sensibilidad: la geometría métrica euclídea es una construcción conceptual antiperceptiva por excelencia: ni se captan puntos, ni rectas, ni planos, ni relaciones como la de paralelismo..., ni el espacio que supone es homogéneo —y por ello, isótropo, ilimitado...— lo mismo que tampoco se captan perceptivamente los principios newtonianos, principios que son contrapuestos al sentido común y de aquí la búsqueda que hacían matemáticos como Euler de una demostración de su necesidad 'lógica' porque, de lo contrario, son meros postulados que pueden no corresponder a realidad alguna —como de hecho ocurre y, por ello, en la actualidad, una Mecánica como la newtoniana, como cualquier otra, se estima como modelo de una parcela de la realidad; más aún, en el caso newtoniano, como caracterización postulacional de sistemas inerciales—.

Desde la Geometría métrica euclídea, desde la Mecánica newtoniana se está, permanentemente, indicando que hay que ver lo que no se ve y que no hay que ver lo que se ve...

La necesidad atribuible a la geometría métrica euclídea es la de una necesidad lógica para elaborar la Mecánica newtoniana, pero no una necesidad intrínseca de tal Geometría métrica. Identificar ambas necesidades es una confusión de base en la que Kant cae. Error que invalidaría su tesis de que son los principios regulativos de la geometría métrica los propios de la forma de la sensibilidad del sujeto. Invalidaría sus identificaciones entre espacios como el conceptual, el físico y el sensorial. Invalidaría, por otro lado, su tesis del apriorismo en cuanto a su matiz modal constitutivo de necesidad.

Aceptar alguno de los argumentos metafísicos podría conducir a asumir que los objetos del mundo externo deben estar dotados de extensión espacial. O también que esos objetos se nos dan en unas formas espaciales determinadas. Ahora bien, el carácter geométrico de tales formas no puede ser determinado *a priori*: sólo la experiencia podrá determinar si tales formas son métricas o no y, de ser métricas, a qué tipo de métrica responden.

Las palabras anteriores suponen aceptar, en todas sus líneas, las críticas a Kant realizadas por Riemann en su *Habilitación* y que fueron adoptadas, por ejemplo, por Helmholzt. Supone, por otro lado, que la posición kantiana no es, en modo alguno, correcta ni en cuanto a su intento de fundamentar el hacer matemático, el hacer científico, ni en cuanto a su intento de justificar la posibilidad del mismo. Supone que, al constituir esa justificación el núcleo básico de su sistema, éste queda, radicalmente, afectado.

Lo cual no implica que no sea aceptable su insistencia en el aspecto constructivo del hacer matemático e, incluso, afirmar que es aceptable su teoría del esquematismo, con las modificaciones correspondientes, para dar cuenta del proceso constructivo en un determinado tipo de hacer matemático, el Hacer Figural por modo exclusivo. Es el único en el cual se puede presentar el dato figural —la figura que se traza y borra, la fórmula de una función, la de una ecuación o sistema de ecuaciones diferencial...— como dato previo sobre el cual realizar la construcción sintética o la descomposición analítica. Métodos de construcción regulados por unos postulados que se muestran como elementos regulativos de la misma y no solamente como principios de derivación axiomática. Elementos regulativos que no tienen por qué quedar dotados de necesidad alguna en sí, aunque la tengan para poder regular un determinado hacer constructivo.

Algo imposible de aceptar para un Hacer matemático como el Global donde el dato previo es el sistema, agregado o multiplicidad y donde lo que entra en juego es un hacer de definiciones por postulados, por relaciones de equivalencia o abstracción en las cuales no importa la naturaleza de los objetos que se manejan; y con demostraciones de carácter básicamente existencial en las que se asegura la existencia de un objeto pero se es impotente para dar dicho objeto por lo que jamás podrá ser el dato que la intuición hace caer bajo el concepto... Un Hacer global que invierte la consideración ontológica en la que creyó Kant de partir del objeto y predicar propiedades del mismo.

En cualquier caso puede afirmarse que la problemática del hacer matemático, lo que calificar Filosofía de la Matemática, se encuentra incardinada en el núcleo del pensamiento de Kant. Y es lo importante: la problemática en sí, porque lo que no se puede aceptar es que diera la solución, ya definitiva, de la misma. Algo que creyó alcanzar Kant por lo que, en este punto, quedó del lado de los profetas de desdichas. Profetas de desdichas que siempre han fracasado, afortunadamente como señaló Poincaré, porque de lo contrario, de haber dado solución definitiva a una problemática como la del hacer matemático, habrían cerrado la labor de la propia razón constructiva de la que pretendían ser sus defensores.

La *Bibliografía* sobre Kant es inabarcable. Aunque más especializada, puede afirmarse lo mismo en cuanto al tema KANT Y LA MATEMÁTICA. Me limito a indicar que en un año como 1992 se editaron, simultáneamente, tres libros centrados en este tema:

DE LORENZO, Javier: *Kant y la Matemática. El uso constructivo de la razón pura.* Ed. Tecnos, Madrid, 180 pp.

FRIEDMAN, Michael: *Kant and the Exact Sciences.* Cambridge, Massachussetts, Harvard Univ. Press., XVII+357 pp.

POSY, Carl J. (ed.): *Kant's Philosophy of Mathematics. Modern essays.* Dordrecht: Kluwer Academic. Synthese Library 219, X+370 pp. (Contiene, entre otros, algún ensayo de Friedman).

Y también ese año se publican otras obras en las que el tema se encuentra incardinado. Así,:

FOLINA, Janet: *Poincaré and the Philosophy of Mathematics.* McMillan Press Ltd., Londres, XVII+202 pp. El cap. 1: 'Kant and Mathematics, an Outline', pp. 1-29.

Son clásicos los trabajos contenidos en:

HINTIKKA, J., 1974: *Knowledge and the Known.* Dordrecht Reidel, como recopilación de ensayos acerca de Kant.

HINTIKKA, J.: *Lógica, juegos de lenguaje e información. Temas kantianos de filosofía de la lógica.* Ed. Tecnos, Madrid, 1976. La obra original es de 1973.

Recomendables, los ensayos:

EWALD, W.E. (ed.), 1996: *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics,* Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford.

PARSONS, 1984: *Mathematics in Philosophy.* Cornell Univ. Press. Ithaca.

RISJÖRD, M. 1990: 'The sensible foundations for mathematics: a defense of Kant's view'. *Stud. Hist. Phil. Sci.* vol 21 1: 123-143.

Para los distintos tipos de hacer matemático y sus caracterizaciones:

DE LORENZO, J.: *Introducción al estilo matemático*. Ed. Tecnos, Madrid, 1989.

DE LORENZO, J.: 'Dónde situar la matemática'. *Mathesis* 8: 369-387. México, 1992.

DE LORENZO, J.: 'La razón constructiva matemática y sus haceres'. *Mathesis* 9: 129-153. México, 1993.

DE LORENZO, J.: 'La Matemática, un hacer constitutivo para la Filosofía, y algo más'. *Arbor*, Madrid, 1995.

DE LORENZO, J.: *La Matemática: de sus fundamentos y crisis*. Ed. Tecnos. Madrid, 1998.

Las citas de Kant han sido tomadas de:

¿Qué es la Ilustración? En Kant: *Filosofía de la historia*. Trad. y prólogo de E. Imaz. El Colegio de México, México, 1941.

Historia general de la naturaleza y Teoría del cielo. Juárez Editor, B.A., 1969. Trad. de J. E. Lunqt.

Crítica de la razón pura. Ediciones Alfaguara, Madrid, 1978. Trad. de P. Ribas.

Los otros ensayos de Kant mencionados pueden verse en

Opúsculos de filosofía natural, que contiene, entre otros, *Monadología física y Las regiones del espacio*. Ed. al cuidado de Atilano Domínguez. Alianza Ed., Madrid, 1992.

Principios metafísicos de la ciencia de la naturaleza. Trad. de C. Másmela. Alianza Ed., Madrid, 1998.

JAVIER DE LORENZO