

Lógica e ideografía en la especulación de Gottlob Frege *

La lógica formal o matemática de Frege¹ ha sido comparada a la de Aristóteles (J. M. Bochenski, *Formale Logik*). H. Scholz (*Abriss der Geschichte der Logik*, 1931) le considera como el genio más agudo de la lógica del Ochocientos. Efectivamente, Frege fue un continuador del Estagirita, un investigador asiduo de los Fundamentos de la pensabilidad humana. Estaba convencido de que los matemáticos construyeron sus axiomas sobre presupuestos adquiridos, pero para él todavía no ciertos o no lo suficientemente seguros de modo crítico. Además, la representación de los contenidos del pensamiento podía encontrar otras formulaciones (*Begriffsschrift Ideografía*, 1879)² Antes de analizar por entero el problema de los fundamentos de la matemática, es necesario analizar el lenguaje en que la matemática se expresa, formular sus reglas simples e inequívocas. Lo que implica una seria investigación acerca del valor y del significado de todo lenguaje, el descubrimiento de sus componentes universales. Frege defendió su Ideografía de las incomprensiones y de las críticas de los matemáticos contemporáneos, que no

* Este artículo, escrito por su autor en italiano, ha sido traducido al castellano por el P. Alejandro del Cura, O. P.

¹ Gottlob Frege nació en Wismar, Maklemburg, en 1848. Estudió matemáticas y filosofía en la universidad de Gottingen y fue discípulo de Lotze. Después del doctorado se trasladó a Jena hasta 1917. Enseñó privadamente matemáticas, después pasó a ser libre docente y, finalmente, como ordinario honorario. Murió en Bad Kleinen en 1925.

² El subtítulo de esta obra enuncia un programa: "Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens". ("Lenguaje en fórmulas del pensamiento puro, a imitación del lenguaje aritmético").

habían intuído su esencial significado³. El vio que la Ideografía era un medio de uso difícil, pero advirtió también su necesidad en orden a una investigación sobre los fundamentos. Así, en 1884 publicó un amplio estudio (*Die Grundlagen der Arithmetik*), cuyo subtítulo (*Investigación lógico-matemática sobre el concepto de número*) señalaba el camino a seguir para obtener una noción clara de la naturaleza del número, la cual constituye el problema de base de los fundamentos. Frege abandona en esta obra el lenguaje ideográfico para combatir los diferentes conceptos de número hasta entonces enunciados.

Por otra parte, Frege daba a entender que sólo la Ideografía habría permitido analizar el lenguaje matemático por medio de "una lengua de fórmulas". En el intento de proporcionar un fundamento seguro a la matemática, Frege penetró en los terrenos de la lógica y sobre ella se centraron sus intereses: descubrió que la lógica clásica revelaba límites notables en comparación con las exigencias analíticas de la ciencia moderna. Pensaba que la matemática no estaba suficientemente garantizada por el principio de la no contradicción de los axiomas. Entre 1891 y 1892 publicó cuatro artículos: de ellos, el primero y fundamental se refiere a la ciencia: "Ueber das Trägheitsgesetz" (*Sobre la ley de la inercia*). En ellos son estudiadas con profundidad la distinción entre psicología y lógica, la formulación de su teoría del concepto, la fundación de la teoría de los signos y del significado, la teoría de los valores de verdad. En los cuatro *Grundgesetze der arithmetik* se encuentra la síntesis de su trabajo precedente⁴. El título completo de la obra fue "Begriffsschriftlich abegeleitet" (*Principios de la aritmética determinados ideográficamente*, 1903). En ella, Frege encuadraba todos los resultados obtenidos en la búsqueda de la logicización de la matemática. Se presentaba, sin embargo, el problema de analizar sistemáticamente los fundamentos de la matemática a base de la nueva teoría lógica⁵. Los principios intentaron esta solución y constituyeron siempre el canon de la lógica-matemática. La lógica es un componente de la filosofía; por ello, Frege entra en el orden de los puros especulativos. Sin embargo, su obra separa a la lógica de la filosofía y le confiere el carácter de una ciencia pura, con objetos y normas autónomas. Frege va más allá de la investigación sobre los fundamentos realizada por

³ Esta defensa la desarrolló en tres artículos, aparecidos en *Jenaische Zeitschrift f. Naturwiss.*: uno, en 1879 (*Aplicaciones de la Ideografía*); el segundo, en 1882 (*Finalidad de la Ideografía*); el tercero apareció en *Zeitschrift f. Philos. u. philos. Kritik* (*Justificación científica de una Ideografía*).

⁴ El primero salió en 1893.

⁵ Conviene recordar que también, y quizás antes que él, el italiano Peano había enunciado una teoría ideográfica, y que Russell, que había descubierto una antinomia en el quinto axioma de Frege, derivó de éstos todo su sistema lógico-matemático.

Dedekind y por Cantor y llega a la noción de número como realidad fuera del espacio y del tiempo

Las consecuencias son de un alcance enorme. Efectivamente, se deriva de ello que todo el pensamiento, y, por ende, también la lógica y la matemática, pertenece a un orden extra-cronotópico. Así descubre la instrumentalidad de la idea de función, anexiona al valor de los números el de Verdadero y Falso, que ya salen del campo estrictamente matemático. De donde se sigue que la función no es ya un medio de la matemática, sino un concepto, entendido no como objeto de la lógica, sino como forma de la expresión, como objeto de la filosofía del lenguaje. Se tiene el paso de la matemática a la lógica, a los problemas técnicos de la Ideografía, a las perspectivas de la filosofía del lenguaje. Por oportunidad metodológica, seguiremos su discurso especulativo en "El pensamiento", "La negación", "La composición del pensamiento"⁶. Con estas nociones de base Frege se convenció de que había abierto un camino nuevo para el análisis de los fundamentos de la matemática. Abandonó finalmente la distinción entre "sentido" y "denotación". Observa Carlos Lazzarini (Comentario alle "Ricerche Logiche", ed. Calderini Bologna 1970): "La nueva lógica matemática, a cuya fundación tanto había contribuido Frege, tendía finalmente a hacerse cada vez más un cálculo formal, un instrumento técnico asimilable a una rama particular de la matemática".

Frege desconfiaba del "formalismo": su interés estaba centrado sobre los caracteres "intensivos", sobre aquello que condiciona y precede a la forma y al puro cálculo. Desplazó la atención de la proposición al pensamiento, del hecho lingüístico a las condiciones gnoseológicas, de la lógica a la metafísica. Por ello analizaremos también los estudios "Función y Concepto" (Jena 1891), "Sentido y denotación", "Concepto y objeto"⁷, que nos parecen determinantes para los fines del desarrollo de la lógica matemática, de la semántica y de la filosofía del lenguaje, en cuanto que precisan la distinción en el significado de los nombres, de los conceptos y de las proposiciones entre "sentido y denotación", y descubren el valor funcional del concepto.

Por lo que se refiere al análisis del pensamiento, Frege declara en seguida que la palabra "verdadero" indica la dirección de la lógica, pero de diferente manera que la de las otras cien-

⁶ Aparecieron en la revista "Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus", n. 13, 1918-19; n. 1, 1923-24. El título global fue "Investigaciones Lógicas" y apareció con el tercer estudio, cuyo título va precedido de este encabezamiento: "Logische untersuchungen dritter Teil".

⁷ El segundo y el tercero aparecieron en 1892; uno, en "Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik"; el otro, en "Veierteljahrsschrift für Wissenschaftliche Philosophie".

cias. A ella, en efecto, pertenece el papel de descubrir las leyes del ser verdadero, es decir, las leyes por lo que es verdadero lo que es verdadero. Son por lo mismo leyes distintas, tanto de las éticas como de las naturales: en cuanto tratan de un ser, puesto que, como hemos dicho, la lógica indaga el ser, o mejor aún, las razones por lo que es (verdadero) aquello que es (verdadero).

Según Frege “de las leyes del ser verdadero se derivan prescripciones para el creer, el pensar, el juzgar, el inferir”. (Estudio 1 cit.).

Hay, pues, que tener presente la distinción entre leyes psicológicas y leyes lógicas. A las primeras pertenecen las leyes de la creencia y del pensamiento. A las segundas corresponde la tarea de encontrar las leyes del ser verdadero, en las cuales solamente se desarrolla el significado de la palabra “verdadero”, que no es el de “veraz” ni el de “verídico”, mas significa únicamente aquella verdad cuyo descubrimiento constituye el fin de la ciencia. Por lo tanto, en la lógica lo verdadero es predicable únicamente del pensamiento. La verdad está asegurada con imágenes, representaciones, proposiciones y pensamientos. Las imágenes (Bilder) son entendidas aquí en el sentido de figuras (dibujos, fotografías, etc.); representaciones (Vorstellungen) en el sentido de imágenes subjetivas. La imagen es verdadera si tiene en sí misma una intención, si representa algo. También la representación es únicamente verdadera si a ella corresponde algo. Por lo tanto, se puede afirmar que la verdad consiste en una correspondencia de una imagen y de la cosa por ella imaginada o representada. Toda correspondencia es una relación. Sin embargo, la palabra “verdadero” no es un término de relación, no contiene ninguna referencia a otra cosa con la cual tenga que coincidir aquello que es verdadero” (a. cit.). Se puede presumir que el contenido del término “verdadero” sea de una especie absolutamente particular e indefinible. En una construcción lógica todo es definible en cuanto se puede reducir a conceptos elementales; pero estos sólo son definibles en un proceso al infinito⁸. Para Frege una proposición es verdadera si es verdadero su sentido. Por lo tanto, hablar de “verdadero” es lo mismo que hablar de una proposición. Sin embargo, el ser verdadero no consiste en la coincidencia de este sentido con algo de otra cosa, pues de lo contrario el problema de lo verdadero se repetiría al infinito. Se aclara de este modo en qué consiste el equivoco del uso del término “Verdadero” como predicado de un nombre que indica una imagen o una proposición. Son éstas verdaderas no en razón de una pro-

⁸ Frege defiende que algunos conceptos son elementales por naturaleza. Pero lo que es indefinible en un sistema es definible en otro que asume en sus fundamentos conceptos distintos.

piedad, sino en cuanto que significan una relación o una coincidencia con algo. Esto explica la definición de juicio formulada por Frege: "Un juicio es algo que es o verdadero o falso". De aquí se deriva la noción de pensamiento. Pensamiento es aquello de lo cual se puede preguntar si es verdadero, es el sentido de toda proposición. Por lo mismo la proposición expresa un pensamiento, el cual es algo "NO SENSIBLE". Si el término verdadero es predicable del pensamiento (y solamente del pensamiento), se puede concluir, por analogía con los otros predicados, que él constituye una propiedad del pensamiento. Frege distingue entre proposición, sentido y pensamiento. La primera es una sucesión particular de signos dotada de sentido; éste, a su vez, es todo lo que es expresado por la proposición a nuestra mente. El pensamiento es el sentido particular de una proposición; de él se puede preguntar si es verdadero o falso.

El ser verdadero no es una propiedad perceptible mediante los sentidos. A toda propiedad de una cosa está unida una propiedad de un pensamiento, es decir, la propiedad de la verdad⁹. No obstante, nada se añade al pensamiento cuanto a él se junta la propiedad de la verdad. De este modo, la palabra "verdadero" parece ser de una clase totalmente especial.

Es posible expresar un pensamiento sin presentarlo como verdadero. En una proposición asertoria pensamiento y afirmación están de tal modo ligados que resulta difícil el ver su descomponibilidad. En base a ello son distinguibles el acto de constitución del pensamiento, o sea, el pensar; el reconocimiento de la verdad de un pensamiento, es decir, el juzgar (Frege hace notar la insuficiente distinción entre pensamiento y juicio); la modificación de este juicio, o sea, el afirmar. La ciencia rigurosa mira a la verdad y sólo a la verdad. Podemos ahora preguntarnos: ¿Cuál es la ciencia rigurosa? Frege, como en general los matemáticos, parte de una hipótesis para conseguir demostrar una tesis. Pero no verifica "todos" los elementos de verdad. La primera noción que tendría que aclarar es la de ser, que coincide con la de verdad. Pero también el no-ser es verdadero como no-ser, por lo cual la investigación sobre los fundamentos, se-

⁹ Para Frege existe una diferencia entre gramática y lógica. Las proposiciones secundarias que no expresan una propiedad del pensamiento son proposiciones para la gramática, pero no para la lógica. El período que contiene tales proposiciones es un conjunto para la gramática, pero es una proposición única para la lógica. A nuestro parecer, esto no es exacto. Frege no ha entendido una verdad fundamental. El ser es uno, único y unívoco. Hay el Ser absoluto y el ser por participación, es decir, derivado. Pero en ambos se da la identificación esencial y existencial propia del ser. De él y en él brota el pensamiento (lógica), del cual se deriva el lenguaje (expresión lógica). En este círculo unitario encuentran lugar todos los componentes de la conciencia, que expresa, como ser derivado, los caracteres de vértice de un ser semejante.

gún había ya notado Rosmini, debe de pararse en el fundamento único de la realidad y de la pensabilidad, es decir, en el Ser, ya que, según Parménides, ambas coinciden. El momento en el que es pronunciada la proposición es parte de la expresión del pensamiento. Los pensamientos no son ni representaciones ni decisiones. Las representaciones se distinguen de las cosas del mundo externo, puesto que no son perceptibles por los sentidos, constituyen un hecho de conciencia, tienen necesidad de un portador y son indiferentes. Frege traduce aquí una distinción lingüística a una sustancial. Una cosa "es", una representación "es tenida". Toda representación tiene un solo portador. Precisamente sobre la base de este axioma se levanta la duda de si la verdad es subjetiva, es decir, limitada al contenido de la conciencia. Frege prueba la distinción entre representación y pensamiento por el argumento del absurdo. Muestra las consecuencias paradójicas a las que llevaría su identificación. Desde el momento en que el pensamiento fuera un contenido de conciencia como la representación, el juicio sería subjetivo y privado del valor de universalidad. Para Frege, los pensamientos no son cosas del mundo o representaciones¹⁰. A nuestro parecer, no se da, como cree Frege, un pensamiento fuera del espacio y del tiempo, separado del hombre. Si que se da, pero pertenece a un orden de pensabilidad radicalmente formal en el cual ser y forma son unitotales. Frege afirma resueltamente que la mente no produce un pensamiento si no "se pone con él", en cuanto le preexistía. Esta afirmación implica la noción clásica de la distinción entre pensante y pensado. Según Frege, el hombre, aún siendo portador de representaciones, no es él mismo una representación. No todo es representación. ¡Disentimos! (cfr. a. cit.). También la fórmula más abstracta es "representada" por la fantasía, que la nocionaliza en un concepto definible. Frege ve la necesidad del mundo de las cosas y del mundo del pensamiento en una concepción platónica. Estamos de acuerdo. No se da representación primaria sin su propia condición, esto es, prescindiendo de la presencia de su condición de la cual sólo puedo predicar que es, aun cuando sí, por razón de la certeza, es únicamente en el acto en el que se presenta. Frege hace una afirmación gravísima: "Siempre que el hombre toma por real una representación entra en el mundo de la "poesía", en el cual no tiene sentido el juzgar verdadero o falso aquello que se dice". ¡No! La poesía es más "verdadera" que la matemática. Ella hace vivo y actual (y por lo mismo ciertamente verdadero) al ser; la lógica le es inherente. La matemática no capta el ser tan de cerca como la poesía, sino

¹⁰ No estamos de acuerdo. Los pensamientos son única y exclusivamente representaciones. (Cfr. Simone Loricci, "Introduzione alla logica del concreto". Ed. Domani, Verona 1970.) El pensamiento es siempre un pensado y, por tanto, siempre expreso, para ser tal, cualquiera sea la forma de su expresividad.

que lo idealiza en fórmulas que lo empobrecen. Hemos visto ya cómo la verdad no es una propiedad del pensamiento, sino su mismo ser. El es objetivo, sólo perceptible por la pensabilidad (Die Denkkraft) y eterno. Cuando el sujeto lo juzga como verdadero, determina en él una variación, que se prolonga, a través del acto de la volición, en una modificación del mundo. Sin embargo, las cosas no pueden modificar el pensamiento, según Frege.

A nuestro juicio, esto es insensato o, al menos hipotético. De hecho ésta se apoya sobre la distinción indemostrada entre ser-pensamiento-realidad. Frege se detiene en el concepto de negación. Para él si el ser de un pensamiento es su ser verdadero, la expresión "un pensamiento falso" es tan contradictoria como la expresión "un pensamiento que no es"¹¹.

Frege parte del presupuesto que las puras y simples palabras no expresan completamente el pensamiento; para tener el pensamiento completo hay que tener también presente las circunstancias en las que tales palabras han sido pronunciadas. Ello confirma el axioma precedente: la idea de un pensamiento negativo no es menos útil que la de un pensamiento afirmativo y ni siquiera es del todo inútil. La proposición interrogativa está constituida por el contenido y por la pregunta. Ahora bien, si un pensamiento es verdadero en cuanto que es, una interrogativa de contenido claramente falso no expresa un pensamiento. Además, si el sentido de una proposición es el pensamiento que ella expresa, se deduciría de aquí que la proposición carece de sentido. Lo que, a nuestro parecer, no es exacto lógicamente, si el pensamiento es verdadero por el hecho de ser pensamiento. Al pensamiento, en efecto, no se le pueden poner límites de marginación humana o de condiciones de su acción. La pensabilidad está por encima del pensamiento verdadero y del pensamiento falso. Efectivamente, una cosa es un no-sentido (proposición que no expresa ningún pensamiento) y otra un sentido equivocado (proposición que expresa un pensamiento falso). Un pensamiento falso, hasta que no lo hayamos juzgado, es un pensamiento igual que un pensamiento verdadero. Por tal razón Frege identifica el sentido de la proposición con el pensamiento. En la lógica clásica se indagaban las inferencias inmediatas, deducibles de las proposiciones categóricas universales y particulares. La contraposición (con la conversión, la obversión y la inversión) era una inferencia inmediata. De las inferencias inmediatas se puede pasar a las mediatas. Frege llama a estas últimas "De-

¹¹ La negación, cuando expresa un juicio de no ser, es una afirmación de verdad. Parménides dijo que el no ser no es, pero el predicado "no-es" permanece siempre una afirmación, que convencionalmente decimos contraria a otra. En efecto, el no-ser es pensable por orden al ser.

mostración indirecta". Constata también que la negación no es la descomposición de la estructura del pensamiento. La opinión de que la negación es la descomposición de la estructura del pensamiento, tiene sus orígenes en el intento de identificar el pensamiento con el juicio. De aquí se sigue que, como ya antes decíamos, el negar no es el opuesto del juzgar. La negación es una eventual parte constitutiva del pensamiento. Por el contrario el juicio sobre el pensamiento es una actividad de la conciencia, por la cual se encuentra sobre un plano distinto del de la negación. De donde se sigue que la negación es una parte constitutiva del pensamiento judicativo. Frege constata que existen pensamientos verdaderos y falsos, que la negación recubre todo el pensamiento negado, que la negación se completa uniéndose con el pensamiento negado. De lo cual resulta también y solamente otro pensamiento. La ilación es consecencial; la negación es objetiva e indiferente de la conciencia pensante. Ello es explicable en el supuesto de una noción ontológica del pensamiento, a la cual Frege no renuncia en modo alguno. Volviendo al juicio, tenemos que corregir la idea de que quien juzga es quien produce con su juzgar la conexión interna del juicio; en este caso, efectivamente, no permanece la distinción entre la concepción de un pensamiento y el reconocimiento de su verdad. Ni siquiera existen dos modos distintos de juzgar. Para que esto suceda, son necesarias la fuerza asertoria en el caso de la afirmación; la fuerza asertoria en el caso de la negación, en unión indisoluble con la palabra "falso"; un término negativo como "no" en las proposiciones que se pronuncian sin fuerza asertoria. Mientras que si suponemos un solo modo de juzgar, son necesarios la fuerza asertoria y el término negativo. "Tal ahorro es siempre índice de un avance en el análisis y el análisis permite ver las cosas con más claridad. Se ahorra, además, el tener que introducir otra ley para el silogismo". (Frege — "Investigaciones Lógicas"— a. cit).

Es obvio que a todo pensamiento corresponde, al menos, uno que le contradice de donde se sigue que un pensamiento es reconocido como falso cuando su contradictorio es reconocido como verdadero. De este modo la negación de un pensamiento es un pensamiento que puede servir para completar la negación. Según Frege hay seis tipos de composición del pensamiento¹². La forma más simple de conexión entre dos pensamientos es la copulativa, expresada por la conjunción "y". Para Frege el pensamiento es aquella cosa para la cual vale: o es verdadero o es falso, y

¹² En la lógica formal, la composición de pensamientos se considera como "cálculo de los enunciados", se apoya en la búsqueda del valor operativo de los "conexivos", o sea, de los signos que, como constante lógica, unen entre sí a las proposiciones, es decir, a los enunciados.

no se da un tercer caso. Para comprender axiomas de este tipo es necesario servirse de las MATRICES DE VERDAD (introducidas en la lógica contemporánea por Wittgstein) según las indicaciones de Peirce y las hipótesis de los Megáricos. Indicando la proposición a conexionar con A y B, con V lo Verdadero y con F lo Falso, podemos construir por la conjunción esta matriz:

A	B	A y B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Pueden verse las divergencias entre los valores de verdad "A y B" y los valores de verdad de "A" y de "B". Se trata de la propiedad conmutativa de la conjunción: la tercera columna no cambia cuando se invierten entre sí las dos primeras. El segundo tipo de composición del pensamiento consiste en la negación de una composición del primer tipo de un pensamiento con otro pensamiento, que es una composición de los mismos dos pensamientos. Se trata de una negación de una conjunción (alternativa débil negativa). Dado el conexivo monovalente (doblemente insaturado), llamado conjugación, Frege deduce todos los remanentes conexivos de las diversas combinaciones de estas dos cosas. Como se ve, considera en primer lugar el caso de la negación de la conjunción. Puesto que estos dos conexivos no presentan algún carácter particular, han de ser considerados como privilegiados para fundamento de todos los demás. La composición del segundo tipo está presentada esquemáticamente por: "no (A y B)".

Por consiguiente, y puesto que la negación de una proposición verdadera es una proposición falsa y viceversa, la matriz se puede configurar como sigue:

A	B	no (A y B)
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

El tercer tipo de composición del pensamiento viene proporcionado por la composición de un primer tipo de la negación de un primer pensamiento con la negación de un segundo pensamiento, que es una composición del primer pensamiento con el segundo. Se tiene así la conjunción de dos negaciones, conjunción negativa, cuya matriz de verdad es:

A	B	(no A) y (no B)
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

El cuarto tipo de composición del pensamiento está determinado por la negación de la conjunción de dos negaciones (alternativa débil). Su matriz de verdad resulta como sigue:

A	B	no [(no A) y (no B)]
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

El quinto tipo de composición del pensamiento resulta de la conjunción de una negación y de una afirmación. Su matriz de verdad es la siguiente:

A	B	(no A) y B
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

El sexto tipo de composición del pensamiento se configura como negación de la conjunción de una negación y de una afirmación (implicación). Esta es su matriz de verdad:

A	B	no [(no A) y B]
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Resumiendo los seis tipos de composición del pensamiento se obtiene:

- I. A y B
- II. no (A y B)
- III. (no A) y (no B)
- IV. no [(no A) y (no B)]
- V. (no A) y B
- VI. no [(no A) y B]

De aquí resulta un axioma lógico de base y que Frege formula así: "Si en una composición de pensamiento matemático se sustituye un pensamiento con otro pensamiento del mismo valor de verdad, la composición de pensamiento así obtenida tiene el mismo valor de verdad que la composición originaria."

El autor formula así uno de los fundamentos de la lógica extensional, que prescinde del sentido de los pensamientos y solamente opera sobre la base de sus valores de verdad.

En este punto, Frege vuelve a tomar el discurso sobre la Ideografía. Comienza analizando el concepto de función: "Por función de x se ha entendido una expresión de un cálculo que contiene x, o sea, una fórmula en la cual está incluida la letra x" (Investigaciones lógicas, op. cit.).

De donde se sigue que la expresión $2 \cdot x^2 + x$ sería una función de x, y $2 \cdot 2^3 + 2$ sería una función de 2. A Frege no le satisface esta formulación, por cuanto no distingue forma de contenido, sino de designado. La función, si solo fuera realmente aquello que está designado por la expresión de un cálculo, sería exclusivamente un número. Con facilidad se tiende a ver en la forma de la expresión la esencia de la función. Reconocemos la función en la expresión porque la pensamos descompuesta. Tal descomposición está indicada por la forma de expresión.

Las dos partes en las cuales se descompone así la expresión del cálculo, el signo del argumento y la expresión de la función, no son del mismo género. De hecho, el argumentó es un número, un todo cerrado en sí mismo; por el contrario, la función no lo es. Aquello en que se transforma la función —cuando es completada por su argumento— se le llama “valor de la función” a causa de este argumento.

El método de la geometría analítica ofrece un medio para hacernos intuir los valores que asume una función por argumentos distintos. Según Frege, se puede indicar un modo simple para designar el curso de los valores de una función. Esta tiene que recibir un valor hasta cuando se toma como argumento un valor de verdad; pero una convención para este fin sólo puede ser dirigido a lo más por los signos ya en uso, de manera que ella suceda sin que haya de tenerse muy en cuenta aquello que sufre la determinación. Pueden así tomarse en consideración algunas funciones que nos interesan precisamente cuando su argumento es un valor de verdad.

Presenta Frege una de estas funciones de este modo: —x, con la convención de que el valor de esta función tiene que ser verdadero cuando se toma como argumento lo Verdadero y lo Falso en todos los otros casos. Por ejemplo:

$$\text{—————} 1 + 3 = 4$$

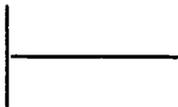
tiene por valor lo Verdadero, mientras que

$$\text{—————} 1 + 3 = 5$$

o también

$$\text{—————} 4$$

tienen por valor lo Falso. Semejante función tiene por valor el mismo argumento en caso de que éste sea un valor de verdad. Frege había introducido el “signo de contenido” como parte del “signo de juicio”. He aquí su esquema:



El signo horizontal sirve para introducir una proposición que expresa un pensamiento todavía no asegurado. Ahora la llama solamente “signo horizontal”¹³. Así, llama “signo de negación” al trazo vertical en la sigla \neg^x . Esta función tiene por argumento —x. Por lo cual:

¹³ Por ejemplo: con $\text{—}| 2 + 3 = 5$ afirmamos que $2 + 3 = 5$. Con esta expresión no se ha escrito sólo un valor de verdad (“ $2 + 3 = 5$ ”), sino que se enuncia que un tal valor es lo Verdadero.

$$(\top x) = (\top [\text{---} x])$$

Se fusionan así juntos los dos signos horizontales. Sin embargo, se da también:

$$(\text{---} [\top x]) = (\top x)$$

por el hecho de que el valor de $\top x$ es siempre un valor de verdad¹⁴.

Para expresar que toda cosa es igual a sí misma empleamos la función $x = x$, cuyo argumento está indicado por x . No obstante, es necesario destacar que el valor de esta función es siempre lo Verdadero, sea cualquiera el asunto en cuestión. Frege, con la fórmula $\text{---}^a\text{---} f(a)$ entiende lo Verdadero cuando la función $f(x)$ tiene siempre como valor lo Verdadero, cualquiera que sea su argumento. En los otros casos (o sea, cuando la función tiene por valor lo Falso, o también cuando tiene por valor un objeto que no sea valor de verdad), escribiendo $\text{---}^a\text{---} f(a)$ Frege entiende lo Falso. Para la función $x = x$ se tiene solamente el primer caso. De aquí se sigue que $\text{---}^a\text{---} a = a$ es lo Verdadero, transcribible así: $\text{---}^a\text{---} a = a$.

Por lo que podemos leer esta expresión del modo siguiente: cualquier cosa que sea a , se tiene que a es igual a a . Frege entiende los trazos de los lados de la concavidad como el "signo horizontal". En el puesto de a podría escogerse cualquier otra letra, excepto f y F , usadas para indicar las funciones. Este sistema de signos es en extremo importante. *El proporciona la certeza matemática de negar la universalidad.* El axioma se deriva de esta fórmula: $\text{---}^a\text{---} a^2 = 1$.

Efectivamente, $\text{---}^a\text{---} a^2 = 1$ es lo Falso, en cuanto que el valor de la función $x^2 = 1$ no es Verdadero para todo argumento.

Si $\text{---}^a\text{---} a^2 = 1$ es lo Falso, $\text{---}^a\text{---} a^2 = 1$ es lo Verdadero, en base a lo ya demostrado en virtud del signo de ne-

¹⁴ Con $\top x$ Frege entiende los dos traticos a derecha e izquierda del signo de negación como signo horizontal (cfr. más arriba). Por ejemplo, $\top 2^2 = 5$ significa lo Verdadero, por lo cual es posible aplicarle el signo del juicio $\top 2^2 = 5$. Con ello se afirma que $2^2 = 5$ no es lo Verdadero (es decir, 2^2 no es 5). Así, $\top 2$ es lo Verdadero en cuanto que $\text{---}2$ es lo Falso. En tal sentido se puede escribir $\top 2$; es decir, 2 no es lo Verdadero.

gación¹⁵. Frege demuestra que se dan raíces cuadradas de uno, sustituyendo la función $x^2 = 1$ por la función $\overline{\top} x^2 = 1$.

De $\overline{\top} a^2 = 1$, fusionando los signos horizontales se obtiene $\overline{\top} a^2 = 1$. Esta expresión significa lo Falso, porque el valor de la función $\overline{\top} x^2 = 1$ NO ES LO VERDADERO para todo argumento¹⁶.

Por lo tanto, ya que $\overline{\top} a^2 = 1$ es lo Falso, se sigue que $\top a^2 = 1$ es lo Verdadero. Es decir:

$$\top a^2 = 1 \quad (17)$$

Esto significa que "no se tiene el que para todo argumento el valor de la función $\overline{\top} x^2 = 1$ sea lo Verdadero". Lo que significa también que "no se tiene el que para todo argumento el valor de la función $x^2 = 1$ sea lo Falso", o también "hay al menos una raíz cuadrada de 1".

Estos axiomas son verificables con ejemplos expresados en signos y palabras.

$$\top a = \geq 0$$

Ahí figura por lo menos un signo positivo.

$$\top a = < 0$$

Aquí aparece por lo menos un número negativo.

$$\top a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

Hay, al menos, una raíz de la ecuación.

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

Estos ejemplos nos proporcionan la prueba de la posibilidad de expresar notables proposiciones existenciales.

¹⁵ $\overline{\top} a^2 = 1$ significa, por lo tanto, que no todo objeto es la raíz cuadrada de 1.

¹⁶ Por ejemplo: $\overline{\top} 1^2 = 1$ es lo Falso, porque $1^2 = 1$ es lo Verdadero.

¹⁷ El signo \top representa aquello que en la lógica formal es llamado comúnmente "cuantificador existencial". Significa en la lengua hablada: "Existe al menos un...".

Si identificamos indeterminadamente un concepto con la letra f (que significa una función), en la expresión

$$\overline{\text{---}} \overbrace{\text{---}}^{\text{a}} \text{---} f(a)$$

se obtiene la forma sin el signo del juicio, y en ella están comprendidos todos los últimos ejemplos. Por lo cual, las expresiones

$$\overline{\text{---}} \overbrace{\text{---}}^{\text{a}} \text{---} a = 1, \quad \overline{\text{---}} \overbrace{\text{---}}^{\text{a}} \text{---} a \geq 0$$

$$\overline{\text{---}} \overbrace{\text{---}}^{\text{a}} \text{---} a < 0, \quad \overline{\text{---}} \overbrace{\text{---}}^{\text{a}} \text{---} a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

se derivan de la fórmula precedente, así como de x^2 se derivan 1^2 , 2^2 , 3^2 . Como en x^2 se tiene una función cuyo argumento está indicado por x, así según Frege

$$\overline{\text{---}} \overbrace{\text{---}}^{\text{a}} \text{---} f(a)$$

es la expresión de una función cuyo argumento está indicado por f. Su único argumento es una función. Puesto que las funciones son radicalmente distintas de los objetos, así también las funciones, cuyos argumentos son y deben ser funciones, son radicalmente distintas de las funciones cuyos argumentos son objetos y no pueden ser otra cosa que objetos. Frege llama a estas últimas funciones de primer grado, y a las primeras, funciones de segundo grado. (Cfr. Fundamentos de la aritmética, par. 53; Breslau 1884.)

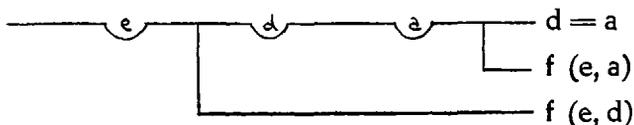
De esta manera, continuando el discurso, se puede aún hablar de las funciones de dos argumentos.

Podemos introducir una función que no es propia de la matemática. Se trata de una función de primer grado con dos argumentos (o sea, que significa no un concepto, sino una relación) expresada por un signo que en la Ideografía había llamado "signo de condición". Ejemplifiquemos. Admitimos que el valor de la función

$$\overline{\text{---}} \begin{array}{l} \text{---} x \\ | \\ \text{---} y \end{array}$$

sea lo Falso cuando se tome por argumento y, lo Verdadero y al mismo tiempo como argumento x un objeto que no sea lo Verdadero; admitimos también que en todos los otros casos el

valor de esta función es lo Verdadero¹⁸. El signo horizontal inferior y las dos partes en las que está dividido por el signo vertical el signo horizontal superior sean consideradas como "signo horizontal". Se sigue de ello que $\text{---}x a\text{---}y$ pueden siempre ser considerados como argumentos de esta función, lo que equivale a decir como valores de verdad. Hemos resaltado cómo Frege ha distinguido, entre las funciones de un argumento, las funciones de primer grado y las de segundo. En el nuevo caso tomado en consideración es posible una mayor variedad de análisis. Algunas funciones de segundo grado con un argumento exigen como argumento una función con un argumento; otras, en cambio, una función con dos argumentos. Estas dos clases son distintas de manera radical. Por ejemplo:



Esta es una función de segundo grado con un argumento, que postula como argumento una función con dos argumentos. La letra f que sirve para indicar el argumento y los dos pasos separados por una coma dentro del paréntesis que siguen a la f evidencian que f es una función con dos argumentos. Reanudando el discurso sobre los Fundamentos, Frege considera el concepto de igualdad, que para él significa identidad, o bien, como lo demuestra en la Ideografía, es una relación entre objetos o entre nombres (o signos) de objetos. Efectivamente, $a = a$ y $a = b$ son proposiciones de valor cognoscitivo diferente. La primera ($a = a$) es a priori y analítica. La forma $a = b$ contiene notables ampliaciones, no siempre justificables a priori. Normalmente, la relación entre el signo, su sentido y su denominación es del tipo siguiente: al signo corresponde un determinado sentido; a éste, una determinada denotación, mientras que a una denotación (es decir, a un objeto) le conviene más de un signo. En efecto, el sentido de un signo denota un solo objeto, mientras que aquello que es denotado, el objeto, puede ser expresado por otros signos de sentido distinto. No se dice, sin embargo, que al sentido corresponda una denotación. Es obvio que de la denotación y del sentido de un signo hay que distinguir la representación que está asociada al mismo signo.

¹⁸ Esta función asume por lo tanto el valor de lo Falso solamente cuando el argumento "x" es lo Verdadero y el argumento "y" es lo Falso o un valor que no sea un valor verdad, por lo que corresponde a aquella implicación material examinada como sexto tipo de composición en el tratado sobre la composición del pensamiento.

Frege sostiene que la denotación de una proposición consiste en su "valor de verdad"¹⁹. Podemos ser inducidos a defender que la relación entre pensamiento y Verdadero no es la de sentido y denotación, sino la de sujeto y predicado. Se sigue de aquí:

a) Si el valor de verdad es aquello que constituye la denotación de una proposición, todas las proposiciones verdaderas tendrán la misma denotación y lo mismo todas las denotaciones falsas.

b) En la denotación de una proposición se cancelan todos los particulares.

c) Nunca podrá suceder que aquello que nos interesa de una proposición sea únicamente su denotación.

d) El valor de verdad de una proposición no cambia cuando sustituimos en ella una expresión por otra de igual denotación.

Otro fundamento de la lógica es el término "concepto", que Frege usa en sentido radicalmente lógico. El concepto (el predicado) es una función, una expresión no saturada; el objeto (el nombre propio) es un argumento para saturar la función. El objeto no se puede saturar, esto es, no se le puede usar como predicado²⁰. Un concepto no deja de ser tal por el hecho de que bajo él haya sólo un único objeto. Para Frege, decir que un concepto cae bajo otro concepto superior equivale a distinguir los conceptos en muchos órdenes (de primer orden, de segundo, etc., es decir, funciones de primer grado, de segundo, etc.). Un concepto de segundo orden es la clase de todos los conceptos de primer orden que contiene en sí. La relación de subordinación de dos conceptos viene dada por dos conceptos del mismo orden. El concepto subordinado es una clase de individuos divisibles en muchas subclases, cada una de las cuales es designada por un concepto subordinado. Se concluye que la diferencia entre sujeto y concepto no es sólo una diferencia de posición de términos en la proposición, sino una diferencia cualitativa: el objeto es cerrado; el concepto, abierto. El uno es un pensamiento saturado; el otro, un pensamiento no saturado. Para determinar si una expresión designa un objeto o un concepto, no podemos basarnos en la forma lingüística, sino que es necesario entender la cualidad de la forma expresada.

De lo dicho hasta aquí resulta que el campo de la matemá-

¹⁹ Por valor de verdad de una proposición Frege entiende el hecho de que sea verdadera o falsa y que no existan otros valores de verdad.

²⁰ Esto queda dudoso, ya que una función puede ser tomada como argumento de otra función, dando así lugar a una función de segundo grado. Más sencillamente: se puede predicar algo de un objeto y además también de un concepto.

tica es tan limitado que para ensanchar sus horizontes ha tenido que invadir los dominios de la lógica. Sus posibilidades son, aparentemente, muy vastas. En efecto, todo el análisis no es más que el desarrollo de los fundamentos. Sobre éstos todavía no ha habido un pronunciamiento definitivo, hasta el punto de que aún no hemos llegado a una definición matemática "cierta" e inalterable de número, y mucho menos a una definición filosófica. En el contexto histórico actual, caracterizado por la secularización y por la sociedad opulenta, la figura del técnico está revalorizada al máximo, con menoscabo de la del filósofo y del humanista en general. El espíritu humano reacciona mediante la Filosofía perenne, que incesantemente emplaza a la ciencia, demuestra su precariedad y proporciona al hombre la esperanza de que no será deshumanizado.

CIRILLO BIANCHI